UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID
FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS
Departamento de Geometría y Topología

TESIS DOCTORAL

Sobre grupos de automorfismos de superficies de Klein

MEMORIA PARA OPTAR AL GRADO DE DOCTOR
PRESENTADA POR

José Javier Etayo Gordejuela

DIRECTOR:

Emilio Bujalance García

Madrid, 2015

José Javier Etayo Gordejuela

SOBRE GRUPOS DE AUTOMORFISMOS DE SUPERFICIES DE KLEIN

Departamento de Geometría y Topología
Facultad de Ciencias Matemáticas
Universidad Complutense de Madrid
1984

Colección Tesis Doctorales. Nº 217/84

Edita e imprime la Editorial de la Universidad
Complutense de Madrid. Servicio de Reprografía
Noviciado, 3 Madrid-8
Madrid, 1984
Xerox 9200 XB 480
Depósito Legal: M-36042-1984

Universidad Complutense de Madrid
Facultad de Ciencias Matemáticas
Departamento de Geometría y Topología

SOBRE GRUPOS DE AUTOMORFISMOS DE SUPERFICIES DE KLEIN

Memoria que presenta
José Javier Etayo Gordejuela
para optar al Grado de Doctor
en Ciencias Matemáticas.

Madrid, mayo de 1983.

INDICE

Constituye un singular privilegio en estas ocasiones, poder expresar el agradecimiento que uno siente hacia muchas personas. Vaya, pues, desde aquí mi más sincera gratitud

a mis padres, que supieron crear el ambiente que ha hecho posible este momento,

a D. Joaquín Arregui y a Emilio Bujalance, sin cuya inestimable ayuda y dirección nunca se hubiera realizado este trabajo,

a los profesores del Departamento, y en particular a Joan Tarrés, Ernesto Martínez y Leopoldo Villarreal, con los que he compartido trabajo y conversación,

a mis compañeros Mª Emilia Alonso, José Manuel Gamboa y Jesús Mª Ruiz, que siempre pusieron a mi disposición sus conocimientos, algebraicos y lingüísticos, y

a mis amigos de dentro y fuera de la Facultad, por su constante estímulo y su fe en esta memoria; y en representación de todos ellos, a Paloma, que la vio crecer página a página.

INTRODUCCION

El objetivo de esta memoria es el estudio de los grupos de automorfismos de las superficies de Klein. El concepto de superficie de Klein surge como extensión del de superficie de Riemann, y se remonta al trabajo de Klein |18|, continuado posteriormente por Weyl |43| y Spencer-Schiffer |41|.

Una superficie de Klein es una superficie X, junto con un recubrimiento abierto $\mathcal{U}=\{U_i\}_{i\in I}$ que cumpla las siguientes propiedades:

i) Para cada $U_i \in \mathcal{U}$, existe un homeomorfismo ϕ_i de U_i sobre un abierto en $\mathbb{C}$ o en $\mathbb{C}^+$.

ii) Si $U_i, U_j \in \mathcal{U}$, y $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, $\phi_i\phi_j^{-1}$ es una aplicación analítica o anti-analítica en $\phi_j(U_i \cap U_j)$.

Llamaremos automorfismo de la superficie a todo homeomorfismo $f : X \longrightarrow X$, tal que $\phi_i f \phi_j^{-1}$ es una aplicación analítica o anti-analítica en su dominio de definición.

Las superficies de Klein pueden ser orientables o no orientables, y con o sin borde. Las orientables sin borde son las superficies de Riemann.

Estas superficies tienen una traducción en términos de Geometría Algebraica: Existen equivalencias funtoriales entre la categoría de las superficies de Riemann y la de las curvas algebraicas complejas; entre la de las superficies de Klein no orientables sin borde y la de las curvas algebraicas complejas sin parte real; y entre la de las superficies de Klein con borde y la de las curvas algebraicas reales |2,3|.

Grupos fuchsianos y superficies de Riemann.

El estudio sistemático de los grupos fuchsianos fue iniciado por Poincaré |31| en 1882. Desde entonces hasta la actualidad se ha desarrollado un continuo trabajo sobre ellos, estudiándose los subgrupos y subgrupos normales, la maximalidad de los subgrupos, las regiones fundamentales asociadas, y el cálculo efectivo de transformaciones conformes que nos dan estos grupos. Sus campos de aplicación van desde la Geometría Algebraica hasta el Análisis Funcional y la Topología. Los trabajos más fundamentales en esta materia han sido realizados por Ahlfors, Beardon, Greenberg, Lehner, etc.

En el estudio de las superficies de Riemann se vio desde un principio su estrecha relación con los grupos fuchsianos, por lo que ambas teorías han tenido un desarrollo paralelo.

El estudio de los grupos de automorfismos de las superficies de Riemann se plantea de modo natural al estudiar estas superficies. Así, Hurwitz |15| determinó el máximo número de automorfismos de una superficie, y Wiman |45| el orden máximo de un automorfismo. Los autores antes mencionados han continuado el estudio de las superficies de Riemann y sus grupos de automorfismos.

En 1961, Macbeath |19| replantea la relación entre superficies y grupos fuchsianos, y en años posteriores se obtienen resultados en este sentido, en especial por Accola, Harvey, Maclachlan, Moore, etc.

Hasta fecha muy reciente, se habían estudiado únicamente los automorfismos que conservan la orientación; posteriormente, hacia 1970, se ha comenzado el estudio de los automorfismos anti-conformes y de las simetrías, a partir de los grupos NEC, como luego veremos. En esta dirección se han desarrollado los trabajos, entre otros, de Earle |12| , Sibner |33,34,35| , Singerman |38,40| y Zarrow |46|.

En nuestra memoria dedicamos dos capítulos al estudio de los automorfismos no orientables en superficies de Riemann. Consideramos en primer lugar las simetrías, esto es, los automorfismos no orientables de orden 2, y a continuación los de orden arbitrario.

Grupos NEC y superficies de Klein.

Los grupos NEC constituyen una generalización de los grupos fuchsianos, incluyendo los elementos que invierten la orientación. La estructura de estos grupos fue establecida casi un siglo después de la de los grupos fuchsianos.

Los grupos NEC fueron primero estudiados por Wilkie |44| en 1966, y posteriormente Macbeath |22| en 1967 estableció las condiciones en que dos grupos NEC son isomorfos. La teoría de los grupos NEC ha tenido un rápido desarrollo, con trabajos de Bujalance, Sibner, Singerman, Zieschang.

El campo de aplicación de los grupos NEC es muy amplio: teselación de superficies (Jones-Singerman |16|, Singerman |39|), estudio de 3-variedades y recubridores ramificados (Zieschang |47|), curvas algebraicas (Bujalance-Gamboa |9|), espacio de Teichmüller, espacio de moduli y grupo módular (Macbeath-Singerman |23|), y como indicábamos anteriormente automorfismos anti-conformes de superficies de Riemann.

El estudio de las superficies de Klein que no son de Riemann, aunque iniciado por Klein en 1882, no se desarrolló sistemáticamente hasta el trabajo de Alling-Greenleaf |3| en 1971, que es el primer estudio moderno sobre ellas. El motivo de esta lentitud es la carencia de una herramienta manejable, lo que limita por ejemplo a Alling y Greenleaf a estudiar los automorfismos sólo para los géneros 1 y 2.

En 1975, Preston |32| y May |26| relacionan las superficies de Klein con los grupos NEC, y estos resultados permiten ya el estudio de los grupos de automorfismos de superficies de Klein. En estos últimos años se continúa un gran trabajo en estos temas.

En nuestro trabajo nos planteamos tres tipos de problemas:

1° Estructura de los grupos NEC que generan los grupos de automorfismos de las superficies.

2° Acotación del orden de los grupos según el género de la superficie.

3° Mínimo género de la superficie para un grupo dado.

Estos tres tipos de problemas son cuestiones clásicas que se plantean en el estudio de grupos de automorfismos de superficies de Riemann y de Klein. Además de su interés por sí mismos, al dar propiedades generales de los grupos, son de gran utilidad para el cálculo efectivo de los grupos de automorfismos.

Así, en este cálculo efectivo, la técnica habitual es la siguiente: en primer lugar se acotan los órdenes del grupo y de sus elementos; pero no todo grupo con estos órdenes es grupo de automorfismos. En estos casos se eliminan algunos de estos grupos en virtud de resultados sobre el género mínimo. Por último se intenta realizar los grupos mediante las condiciones sobre estructura de los grupos NEC.

El primer problema lo hemos estudiado para todas las superficies de Klein que no son de Riemann. Del segundo tipo nos hemos interesado por dos cuestiones concretas, una para superficies con borde, y otra para superficies cualesquiera. Por último el tercer tipo de problemas lo hemos considerado para las superficies sin borde en ciertas condiciones.

Las técnicas usadas se han basado en los grupos NEC. En ocasiones hemos partido de los resultados conocidos en superficies de Riemann, y entonces hemos obtenido resultados en función del género algebraico de la superficie. En estos casos los hemos refinado posteriormente en términos propios de las superficies de Klein: orientabilidad, género topológico y número de componentes en el borde.

Otros temas los hemos estudiado directamente, aplicando técnicas de superficies de Klein, sin realizar consideraciones sobre las superficies de Riemann.

Resumen de la memoria.

En el capítulo 1 se introducen los conceptos principales sobre los que se va a trabajar, esto es, los grupos NEC y las superficies de Klein, así como los resultados ya conocidos sobre ellos, en los que se fundamenta el resto del trabajo.

El capítulo 2 se dedica a estudiar un problema del primero de los tipos mencionados anteriormente. Calculamos el número de puntos fijos de un automorfismo en una superficie de Klein, cálculo que tiene una aplicación directa en el estudio de curvas algebraicas (véase Macbeath |21|). Basándonos en este resultado, calculamos las posibles signaturas de los grupos NEC intermedios entre el que genera el grupo de automorfismos dado, y el de la superficie.

En los capítulos 3 y 4 estudiamos problemas del segundo tipo. En primer lugar, en el capítulo 3, consideramos el orden de un grupo de automorfismos cualquiera en una superficie de Klein con borde. Se sabe que una superficie de género algebraico g no admite más de $12(g-1)$ automorfismos, y que siempre tiene al menos $4(g+1)$. En este capítulo construimos una familia infinita de superficies que tienen al menos $6(g-1)$ automorfismos. Sólo en |27| May construyó otras familias infinitas en estas condiciones.

El capítulo 4 se dedica al estudio de los grupos de orden primo en una superficie de Klein, con o sin borde, que no sea de Riemann. Para ello utilizamos los resultados sobre puntos fijos obtenidos en el capítulo 2, y calculamos el máximo orden primo posible de un grupo de automorfismos en una superficie de género algebraico dado. Como indicábamos anteriormente, se estudia a continuación en qué casos se pueden refinar estas cotas, en función de la orientabilidad, género topológico y número de componentes en el borde de la superficie. Estos resultados son útiles para el cálculo efectivo de los grupos de automorfismos en superficies dadas.

En el capítulo 5 consideramos el tercer tipo de problemas, en el caso de grupos abelianos no cíclicos de orden impar, para superficies sin borde: esto es, dado un grupo en estas condiciones, obtenemos el menor género posible de una superficie que lo admita como grupo de automorfismos. Como consecuencia de este resultado se calcula también el máximo orden impar posible de un grupo abeliano en una superficie dada, y una tabla de resultados concretos para órdenes y géneros bajos.

En los capítulos 6 y 7 estudiamos los tres tipos de problemas para automorfismos no orientables de superficies de Riemann. Ambos capítulos tienen la misma estructura: en primer lugar caracterizamos los grupos NEC que generan grupos de automorfismos de una superficie de Riemann en los que aparecen simetrías, o elementos no orientables cualesquiera, respectivamente. A continuación se calcula el género mínimo de una superficie que tenga estos grupos de automorfismos, y por último se acota el orden de los automorfismos. De este modo, así como Wiman obtuvo en 1895 el máximo orden posible de los automorfismos orientables en una superficie de Riemann dada, calculamos el de uno no orientable, y el de uno que genere una simetría.

CAPITULO 1.- PRELIMINARES.

En este capítulo expondremos un resumen de los resultados ya conocidos, en los que se basará el posterior trabajo de la memoria.

A. Grupos NEC.

Consideremos en el plano complejo $\mathbb{C}$ las transformaciones de los siguientes tipos:

$$(1) \quad w(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad z \in \mathbb{C}, \quad a,b,c,d \in \mathbb{R}, \quad ad - bc = 1.$$

$$(2) \quad w(z) = \frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d}, \quad z \in \mathbb{C}, \quad a,b,c,d \in \mathbb{R}, \quad ad - bc = -1.$$

Las transformaciones de los tipos (1) y (2) constituyen un grupo, que llamaremos G, que aplica el semiplano 'Im z > 0' sobre sí mismo. A este semiplano lo llamaremos D.

Las transformaciones del tipo (1) conservan la orientación de D, y pueden ser de tres clases: (a) si $|a+d| > 2$, transformación hiperbólica, tiene dos puntos fijos en el eje real; (b) si $|a+d| < 2$, elíptica, tiene un punto fijo en D; (c) si $|a+d| = 2$, parabólica, tiene un punto fijo doble en el eje real.

Las del tipo (2) invierten la orientación de D, y pueden ser de dos clases: (d) si $a+d \neq 0$, se trata de una reflexión sesgada, y tiene dos puntos fijos en el eje real; (e) si $a+d = 0$, es una reflexión, y admite como puntos fijos una semicircunferencia centrada en el eje real, o una semi-recta perpendicular al mismo.

Dotando al semiplano D de la métrica riemanniana

$$ds = \frac{|dz|}{y}, \qquad z = x + iy,$$

se tiene a D como modelo del plano hiperbólico, y G es entonces el grupo de isometrías.

Llamaremos grupo cristalográfico no euclídeo — grupo NEC — a todo subgrupo discreto, Γ, de G, tal que el espacio cociente $D/_\Gamma$ sea compacto.

Si un grupo NEC contiene sólo elementos que conservan la orientación se llama grupo fuchsiano. A un grupo NEC que no sea fuchsiano lo llamaremos grupo NEC propio.

Proposición 1.1. |23| Un grupo NEC no contiene elementos parabólicos.

B. Región fundamental.

Para el estudio de la estructura algebraica de los grupos NEC, Wilkie |44| demostró que todo grupo NEC determina una región fundamental de un tipo particular, y obtuvo a partir de ella una presentación para el grupo mediante generadores y relaciones. Veremos en este apartado la construcción de Wilkie.

<u>Definición 1.2.</u> Sea H un grupo topológico de transformaciones de un espacio X. Llamaremos a $E \subset X$ un H-empaquetamiento, si $E \cap hE \neq \emptyset$, con $h \in H$, implica que h es la unidad de H.

Sea H un grupo topológico de transformaciones de un espacio X. Llamaremos a $R \subset X$ un H-recubrimiento, si $\bigcup_{h \in H} \{hR\} = X$.

<u>Definición 1.3.</u> Un conjunto F, cerrado en D, es una región fundamental para un grupo NEC Γ, si

i) F es un Γ-recubrimiento en D.

ii) $\mathring{F}$ es un Γ-empaquetamiento en D.

iii) $F - \mathring{F}$ tiene área hiperbólica nula.

Wilkie probó en |44| la existencia de regiones fundamentales para todo grupo NEC Γ, y en particular la siguiente

<u>Proposición 1.4.</u> |44| Sea Γ un grupo NEC; sea $p \in D$, tal que $\gamma(p) \neq p$ para $\gamma \in \Gamma$, $\gamma \neq 1$. Sea entonces

$$F_p = \{ z \in D \mid d(z,p) \leqslant d(\gamma z,p) \quad \forall \gamma \in \Gamma \}.$$

Entonces F_p es una región fundamental para Γ, y es un polígono no euclídeo convexo con un número finito de lados. El espacio cociente D/Γ se obtiene al identificar adecuadamente los lados de la frontera del polígono.

En |44| se demuestra que dado un grupo Γ, existe una región fundamental P para Γ, que es un polígono en D cuyo perímetro es de la forma

$$(1) \quad \xi_1 \xi_1' \ldots \xi_r \xi_r' \varepsilon_1 \gamma_{10} \ldots \gamma_{1s_1} \varepsilon_1' \ldots \varepsilon_k \gamma_{k0} \ldots \gamma_{ks_k} \varepsilon_k' \alpha_1 \beta_1 \alpha_1' \beta_1' \ldots \alpha_g \beta_g \alpha_g' \beta_g'$$

o de la forma

(2) $\xi_1\,\xi_1' \cdots \xi_r\,\xi_r'\,\varepsilon_1\,\gamma_{10} \cdots \gamma_{1s_1}\,\varepsilon_1' \cdots \varepsilon_k\,\gamma_{k0} \cdots \gamma_{ks_k}\,\varepsilon_k'\,\delta_1\,\delta_1^* \cdots \delta_g\,\delta_g^*$.

Cada letra denota un lado del polígono; los lados con igual nombre salvo la prima (ξ, ξ'; $\varepsilon, \varepsilon'$; α, α'; β, β'), se identifican mediante un generador del grupo que conserva la orientación; los lados con igual nombre salvo asterisco (δ, δ^*) se identifican mediante un generador que invierte la orientación.

Así, una vez realizadas las identificaciones, (1) constituye una superficie cerrada orientable, de género g, con k componentes en el borde, y (2) una superficie cerrada no orientable, con g cofias cruzadas y k componentes en el borde.

Además, quedan determinados los grupos estabilizadores en Γ de los puntos de P que son punto fijo para algún elemento de Γ, y que son los siguientes:

El vértice M_i común a los lados ξ_i, ξ_i' tiene como estabilizador un grupo cíclico de orden m_i, con generador x_i.

El vértice N_{ij} común a los lados $\gamma_{i,j-1}$, γ_{ij}, tiene como estabilizador el grupo dihedral de orden $2n_{ij}$ con generadores $c_{i,j-1}$ y c_{ij}.

Los puntos del interior del segmento γ_{ij} tienen como estabilizador el grupo $Z/_2$ generado por c_{ij}.

El vértice N_{i0} común a ε_i y γ_{i0} tiene como estabilizador el grupo $Z/_2$ generado por c_{i0}, y el vértice N_{is_i} común a γ_{is_i} y ε_i' tiene como estabilizador $Z/_2$ generado por c_{is_i}.

Y no hay más puntos en P que sean punto fijo de elemento alguno de Γ.

C. Signatura.

Macbeath |22| asoció a los grupos NEC una signatura, como extensión de la que Klein asoció |13| a los grupos fuchsianos. La signatura viene dada por la región fundamental, y Wilkie y Macbeath probaron que determina completamente la estructura algebraica del grupo.

Definición 1.5. Una signatura NEC es una familia formada por

i) un entero g, llamado género;

ii) un signo, '+' ó '-';

iii) un conjunto ordenado de enteros, $m_1,\dots,m_r$, llamados periodos propios;

iv) una familia ordenada de conjuntos ordenados de enteros, $C_1 = \{n_{11},\dots,n_{1s_1}\}$, ... , $C_k = \{n_{k1},\dots,n_{ks_k}\}$, llamados ciclo-periodos.

Los números g (sólo en caso de signo '+'), r, k, s_i, pueden ser cero. Los números m_i, n_{ij}, son ≥ 2.

Esta signatura se escribe abreviadamente

$$(g,\pm,[m_1,\dots,m_r],\{(n_{11},\dots,n_{1s_1}),\dots,(n_{k1},\dots,n_{ks_k})\}).$$

Si $r = 0$, escribiremos $(\dots,[—],\dots)$; si $k = 0$, $(\dots,\{—\})$; y si algún $s_i = 0$, $(\dots,\{\dots,(—),\dots\})$.

A un grupo NEC con una región fundamental del tipo (1) le corresponde la signatura

$$(g,+,[m_1,\dots,m_r],\{(n_{11},\dots,n_{1s_1}),\dots,(n_{k1},\dots,n_{ks_k})\}),$$

y a uno con región fundamental del tipo (2) le corresponde

$$(g,-,[m_1,\dots,m_r],\{(n_{11},\dots,n_{1s_1}),\dots,(n_{k1},\dots,n_{ks_k})\}),$$

esto es, el signo expresa la orientabilidad o no orientabilidad.

A partir de las regiones fundamentales asociadas a un grupo NEC, o, como hemos visto que es lo mismo, a su signatura, Wilkie construyó una presentación para el grupo mediante generadores y relaciones. En consecuencia, la signatura determina la estructura algebraica del grupo.

El resultado de Wilkie es el siguiente:

<u>Teorema 1.6.</u> |44| Sea Γ un grupo NEC de signatura

$$(g,+,[m_1,\dots,m_r],\{(n_{11},\dots,n_{1s_1}),\dots,(n_{k1},\dots,n_{ks_k})\}).$$

Entonces Γ tiene la siguiente presentación mediante generadores y relaciones:

Generadores: x_i $\quad i = 1,\dots,r$ (transf. elípticas)

a_j, b_j $\quad j = 1,\dots,g$ (transf. hiperbólicas)

c_{ij} $\quad i = 1,\dots,k$; $\quad j = 1,\dots,s_i$ (reflexiones)

e_i $\quad i = 1,\dots,k$ (transf. hiperbólicas)

Relaciones: $x_i^{m_i} = 1$

$$e_i^{-1}c_{i0}e_ic_{is_i} = 1$$

$$c_{i,j-1}^2 = c_{ij}^2 = (c_{i,j-1}c_{ij})^{n_{ij}} = 1$$

$$x_1\dots x_re_1\dots e_ka_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1}\dots a_gb_ga_g^{-1}b_g^{-1} = 1.$$

<u>Teorema 1.7.</u> |44| Sea Γ un grupo NEC de signatura

$$(g,-,[m_1,\dots,m_r],\{(n_{11},\dots,n_{1s_1}),\dots,(n_{k1},\dots,n_{ks_k})\}).$$

Entonces Γ tiene la siguiente presentación mediante generadores y relaciones:

Generadores: x_i $i = 1,\dots,r$ (transf. elípticas)

d_j $j = 1,\dots,g$ (reflexiones sesgadas)

c_{ij} $i = 1,\dots,k$

$j = 1,\dots,s_i$ (reflexiones)

e_i $i = 1,\dots,k$ (transf. hiperbólicas)

Relaciones: $x_i^{m_i} = 1$

$$e_i^{-1}c_{i0}e_ic_{is_i} = 1$$

$$c_{i,j-1}^2 = c_{ij}^2 = (c_{i,j-1}c_{ij})^{n_{ij}} = 1$$

$$x_1\dots x_re_1\dots e_kd_1^2\dots d_g^2 = 1.$$

En adelante, cuando denotemos a un elemento de Γ mediante las letras a,b,c,d,e,x, nos referiremos a los elementos de una presentación de este tipo.

Una vez visto que la signatura determina la estructura algebraica del grupo, se plantea el problema de cuánco dos signaturas distintas corresponden a grupos isomorfos. Esta cuestión fue abordada en primer lugar por Wilkie, que en |44| obtuvo condiciones suficientes para que dos signaturas correspondan a grupos isomorfos; y a continuación Macbeath estableció las condiciones necesarias y suficientes, mediante el siguiente

<u>Teorema 1.8.</u> |22,44| Sean Γ y Γ' dos grupos NEC de signaturas $(g,\pm,[m_1,\dots,m_r],\{C_1,\dots,C_k\})$ y $(g',\pm,[m_1',\dots,m_{r'}'],\{C_1',\dots,C_{k'}'$

Entonces Γ y Γ' son isomorfos si y sólo si:

i) Ambas signaturas tienen el mismo signo;

ii) $g = g'$, $r = r'$, $k = k'$;

iii) $(m'_1,\dots,m'_r)$ es una permutación de $(m_1,\dots,m_r)$;

iv) (Signo '+') Existe una permutación de $(1,\dots,k)$, ϕ, tal que para cada $i \leqslant k$, C'_i es una permutación cíclica de $C_{\phi(i)}$; o para cada $i \leqslant k$, C'_i es una permutación cíclica de la inversa de $C_{\phi(i)}$.

(Signo '-') Existe una permutación de $(1,\dots,k)$, ϕ, tal que para cada $i \leqslant k$, C'_i es una permutación cíclica de $C_{\phi(i)}$ o de su inversa.

Del mismo modo que en los grupos fuchsianos, en los grupos NEC el área de las regiones fundamentales permite relacionar las signaturas de los grupos con las de sus subgrupos, así como estudiar el problema de la realización de las signaturas, esto es, de cuándo una signatura determina realmente un grupo NEC.

Recordando que hemos establecido en el semiplano $\mathbf{D}$ la métrica

$$ds = \frac{|dz|}{y}, \qquad z = x + iy,$$

queda determinado el concepto de área (hiperbólica). La siguiente proposición nos permite asignar a cada grupo un área.

<u>Proposición 1.9.</u> |37| Dado un grupo NEC, todas sus regiones fundamentales tienen la misma área.

<u>Definición 1.10.</u> Llamaremos área asociada al grupo NEC Γ, $|\Gamma|$, a la de cualquiera de sus regiones fundamentales.

Esta área se determina mediante el teorema de Gauss-Bonnet, y se obtiene el

Teorema 1.11. |37| Sea Γ un grupo NEC de signatura

$$(g,+,[m_1,\dots,m_r],\{(n_{11},\dots,n_{1s_1}),\dots,(n_{k1},\dots,n_{ks_k})\}).$$

Entonces

$$|\Gamma| = 2\pi\left(2g-2+k+\sum_{i=1}^{r}\left(1-\frac{1}{m_i}\right)+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{s_i}\left(1-\frac{1}{n_{ij}}\right)\right).$$

Sea Γ un grupo NEC de signatura

$$(g,-,[m_1,\dots,m_r],\{(n_{11},\dots,n_{1s_1}),\dots,(n_{k1},\dots,n_{ks_k})\}).$$

Entonces

$$|\Gamma| = 2\pi\left(g-2+k+\sum_{i=1}^{r}\left(1-\frac{1}{m_i}\right)+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{s_i}\left(1-\frac{1}{n_{ij}}\right)\right).$$

Como el área de una región fundamental ha de ser estrictamente positiva, queda expresada una condición necesaria para que una signatura determine un grupo NEC. Zieschang |48| demuestra que la condición es también suficiente, esto es:

Teorema 1.12. |48| Dada una signatura

$$(g,+,[m_1,\dots,m_r],\{(n_{11},\dots,n_{1s_1}),\dots,(n_{k1},\dots,n_{ks_k})\}),$$

existe un grupo NEC con esa signatura si y sólo si

$$2g-2+k+\sum_{i=1}^{r}\left(1-\frac{1}{m_i}\right)+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{s_i}\left(1-\frac{1}{n_{ij}}\right) > 0.$$

Dada una signatura

$$(g,-,[m_1,\dots,m_r],\{(n_{11},\dots,n_{1s_1}),\dots,(n_{k1},\dots,n_{ks_k})\}),$$

existe un grupo NEC con esa signatura si y sólo si

$$g - 2 + k + \sum_{i=1}^{r}(1-\frac{1}{m_i}) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{s_i}(1-\frac{1}{n_{ij}}) > 0.$$

El área de la región fundamental de un grupo NEC permite también el estudio de los subgrupos NEC del mismo. En efecto, éstos son justamente los de índice finito, y además el cociente de las áreas asociadas es el índice. Esto es:

Proposición 1.13. |4| Sea Γ un grupo NEC, y H un subgrupo de Γ, tal que $|\Gamma:H| = N$ finito. Entonces H es un grupo NEC.

Proposición 1.14. |36| Sea Γ un grupo NEC, y H un subgrupo de Γ tal que $|\Gamma:H| = N$ finito. Entonces $N|\Gamma| = |H|$.

Corolario 1.15. Si Γ es un grupo NEC, y H un subgrupo NEC de Γ, $|\Gamma:H|$ es finito.

Estos resultados permiten estudiar la signatura de los subgrupos normales de un grupo NEC Γ, a partir de la de Γ.

Así, la orientación del subgrupo es la misma que la del grupo, si el índice es impar, |5|. Han sido también estudiadas las relaciones entre los periodos propios y los ciclo-periodos de grupo y subgrupo |5,6|.

D. Superficies de Klein.

Nuestro objetivo principal en esta memoria es estudiar los grupos de automorfismos de las superficies de Klein.

Este concepto se remonta al trabajo de Klein |18|, en que estudia las aplicaciones conformes de la botella de Klein, y otras superficies no orientables.

Siguiendo |3| llamaremos superficie de Klein a una superficie X, con o sin borde, junto con un recubrimiento abierto, $\mathcal{U} = \{U_i\}$ que cumpla las siguientes propiedades:

i) Para cada $U_i \in \mathcal{U}$ existe un homeomorfismo ϕ_i de U_i sobre un abierto en $\mathbb{C}$ o en D.

ii) Si $U_i, U_j \in \mathcal{U}$, y $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, $\phi_i\phi_j^{-1}$ es una aplicación analítica o anti-analítica definida en $\phi_j(U_i \cap U_j)$.

Llamaremos automorfismo de la superficie a todo homeomorfismo $f : X \longrightarrow X$, tal que $\phi_i f \phi_j^{-1}$ es una aplicación analítica o anti-analítica en su dominio de definición.

Las superficies de Klein orientables y sin borde son las superficies de Riemann.

Consideremos ahora el cuerpo E de las funciones meromorfas en una superficie de Klein X. E es un cuerpo de funciones algebraicas en una variable sobre $\mathbb{R}$, y como tal, tiene un género algebraico p. Si X es una superficie de Riemann, p coincide con el género topológico g. Si no es una superficie de Riemann, entonces p depende del género topológico y del número de componentes en el borde, k, como sigue: si X es orientable, $p=2g+k-1$, y si X es no orientable, $p=g+k-1$.

(Cuando hablemos de género de ahora en adelante, salvo aviso en contrario nos referiremos al topológico).

Los grupos NEC y las superficies de Klein quedan relacionados en virtud del siguiente resultado:

<u>Teorema 1.16.</u> |3| Si Γ es un grupo NEC, el espacio cociente $^D/_\Gamma$ tiene una única estructura dianalítica tal que la proyección $\pi : D \longrightarrow {}^D/_\Gamma$ es un morfismo de superficies de Klein.

Posteriormente, Singerman y Preston han generalizado el resultado análogo para superficies de Riemann y grupos fuchsianos, obteniendo:

<u>Teorema 1.17.</u> |36| Sea X una superficie de Klein no orientable, sin borde, de género $g \geq 3$. Entonces X se puede representar de la forma $^D/_\Gamma$, donde Γ es el grupo NEC $(g,-,[—],\{—\})$.

<u>Teorema 1.18.</u> |32| Sea X una superficie de Klein de género g, k componentes en el borde y género algebraico ≥ 2. Entonces X se puede representar de la forma $^D/_\Gamma$, donde Γ es el grupo NEC de signatura $(g,\pm,[—],\{(—),\overset{k}{\ldots},(—)\})$, con signo '+' ó '-' según la superficie sea, o no, orientable.

Por último, quedan también relacionados los grupos NEC con los grupos de automorfismos de las superficies. Se tienen, en efecto, los siguientes resultados:

<u>Teorema 1.19.</u> |36| Un grupo finito G es un grupo de automorfismos de una superficie de Klein no orientable, sin borde, de género $g \geq 3$, si y sólo si existe un grupo NEC Γ, y un homomorfismo $\theta : \Gamma \longrightarrow G$, tal que $\ker(\theta)$ es el grupo $(g,-,[—],\{—\})$, y $\theta(\Gamma^+) = G$, siendo Γ^+ el subgrupo de Γ formado por los elementos que conservan la orientación.

<u>Teorema 1.20.</u> |27| Un grupo finito G es un grupo de automorfismos de la superficie de Klein D/Γ si y sólo si $G = \Gamma'/\Gamma$, siendo Γ' un grupo NEC del que Γ es subgrupo normal.

CAPITULO 2.- GRUPOS NEC INTERMEDIOS EN SUPERFICIES DE KLEIN

En este capítulo hacemos un estudio de los puntos fijos que admite un grupo de automorfismos cíclico de orden impar en una superficie de Klein.

Si la superficie de Klein es $S = {}^{D}/_{K}$, cada grupo de automorfismos G de S es de la forma $G = {}^{\Gamma}/_{K}$. Calculamos aquí las signaturas posibles de los subgrupos normales Γ' de Γ, tales que K sea subgrupo normal de Γ'.

El caso particular de superficies de Riemann y grupos de automorfismos orientables, fue resuelto por Moore |30|.

Sean S una superficie de Klein y G un grupo cíclico de orden n impar de automorfismos de S. Consideremos $t \in G$, tal que $\{t^m\}_{m\in N} = G$. Sea $d|n$. Entonces t^d genera un subgrupo de G, de orden $d'=\frac{n}{d}$, al que llamaremos $G_{d'}$.

Si $S = {}^{D}/_{K}$, siendo K el grupo NEC de signatura

$$(g,\pm,[-],\{(-),\overset{k}{\ldots},(-)\}),$$

($k>0$ si el signo es '+'), por el teorema 1.20, es $G = {}^{\Gamma}/_{K}$, y por |5| Γ tiene signatura

$$(\gamma,\pm,[m_1,\ldots,m_s],\{(-),\overset{k'}{\ldots},(-)\}),$$

verificándose que K y Γ tienen el mismo signo, y que $k = 0$ si y sólo si $k' = 0$.

Lema 2.1. Existe un grupo NEC, $\Gamma_{d'}$, subgrupo normal de Γ, tal qué $\Gamma_{d'}/_K = G_{d'}$.

Demostración.

Consideremos los subgrupos fuchsianos canónicos asociados a Γ y a K, esto es, los subgrupos formados por los elementos que conservan la orientación |37|, a los que llamaremos Γ^+ y K^+. Como $[\Gamma:\Gamma^+] = [K:K^+] = 2$, también $\Gamma^+/_{K^+} = G$. Entonces, por |30| existe $\Gamma^+_{d'}$, tal que $\Gamma^+_{d'}/_{K^+} = G_{d'}$. Se verifica que

$$K = K^+ + tK^+, \qquad t \in K - K^+.$$

Consideremos entonces

$$\Gamma_{d'} = \Gamma^+_{d'} + t\Gamma^+_{d'}.$$

$\Gamma_{d'}$ es subgrupo normal de Γ. En efecto, consideremos un elemento cualquiera de $\Gamma_{d'}$. Si pertenece a $\Gamma^+_{d'}$ no hay problema; sea pues de la forma th, $h \in \Gamma^+_{d'}$. Sea $y \in \Gamma$; si $y \in \Gamma^+$,

$$ythy^{-1} = yty^{-1}yhy^{-1}.$$

Como K es subgrupo normal de Γ, $yty^{-1} \in K$; y como $\Gamma^+_{d'}$ es subgrupo normal de Γ^+(|30|), $yhy^{-1} \in \Gamma^+_{d'}$. En consecuencia, $ythy^{-1} \in \Gamma_{d'}$.

Supongamos ahora que $y \notin \Gamma^+$. Entonces $y = tx$, $x \in \Gamma^+$. Se tiene pues

$$ythy^{-1} = (tx)th(tx)^{-1} = (tx)tx^{-1}t^{-1}txhx^{-1}t^{-1}.$$

Por la misma razón que antes, $txtx^{-1}t^{-1} \in K$, $t \in K$, $xhx^{-1} \in \Gamma^+_{d'}$,

$t^{-1} \in K$. En consecuencia, $ythy^{-1} \in \Gamma_{d'}$. Luego $\Gamma_{d'}$ es subgrupo normal de Γ. Y por construcción, $\Gamma_{d'}/_K = G_{d'}$.

Lema 2.2. Sea θ el epimorfismo natural de Γ sobre $G = \Gamma/_K$. Existe un isomorfismo entre los estabilizadores de puntos de D, generados por elementos elípticos de Γ, y los estabilizadores de las imágenes por la proyección canónica $p : D \longrightarrow S$ de estos puntos.

Demostración.

Sean la proyección $p : D \longrightarrow S$, y el epimorfismo $\theta : \Gamma \longrightarrow G$. El núcleo de θ es K, y se verifica que siendo $x \in \Gamma$, $z \in D$, $p(x(z)) = \theta(x)(p(z))$. Así, si $z \in D$ queda fijo por algún elemento $x \in \Gamma$, esto es, $x(z) = z$, entonces $p(z) = p(x(z)) = \theta(x)(p(z))$. Luego θ aplica el estabilizador de z al de $p(z)$.

Veamos que θ es un isomorfismo entre los estabilizadores generados por elementos elípticos, y sus imágenes. En efecto, sea $p' = \theta|_{stab(z)}$, donde $stab(z)$ está generado por un elemento elíptico. Entonces p' es inyectiva: $\ker p' = \ker \theta \cap stab(z) =$ $= K \cap stab(z)$. Como en K no hay elementos orientables de orden finito (pues carece de periodos propios en su signatura), es $K \cap stab(z) = \{1\}$. Además, p' es suprayectiva: sean $y = p(z)$, y $t \in G$, tal que $t(y) = y$. Sean entonces $x \in \theta^{-1}(t)$, $z_1 = x(z)$. Entonces $p(z_1) = p(x(z)) = \theta(x)(p(z)) = t(y) = y = p(z)$, luego existe $k \in K$ tal que $kz_1 = z$, y así $k(x(z)) = z$, luego $kx \in stab(z)$, y $\theta(kx) = \theta(k)\theta(x) = 1 \cdot t = t$.

Como Γ tiene signatura

$$(\gamma,\pm,[m_1,\ldots,m_s],\{(-),\overset{k'}{\ldots},(-)\}),$$

llamaremos r_d al número de periodos propios m_i tales que $m_i = d$. Como existe un epimorfismo de Γ sobre $G = Z/_n$, cuyo núcleo no tiene elementos orientables de orden finito, no puede haber periodos propios mayores que n. Ordenemos entonces los generadores elípticos de Γ del siguiente modo:

$$x_{21},\ldots,x_{2r_2},x_{31},\ldots,x_{3r_3},\ldots,x_{n1},\ldots,x_{nr_n},$$

sometidos a la condición

$$x_{ij}^{i} = 1.$$

Consideremos t, generador de G. Si $d|n$, llamaremos t_d a $t^{n/d}$. Sea $y \in S$ un punto fijo de G, tal que stab(z) tenga orden q. Si y es punto fijo de t_d, entonces $d|q$. Consideraremos pues los puntos fijos de G divididos en clases C_q según el orden de su estabilizador. Si $y \in C_q$, todo punto de la G-órbita de y está en C_q.

Sea ahora x_{qi}, y $\{x_{qi}\}$ su clase de conjugación en Γ. Existe $z \in D$, tal que $x_{qi}(z) = z$; y $\forall\, x \in \Gamma$, $xx_{qi}x^{-1}(x(z)) = x(z)$, y $p(x(z)) = \theta(x)(p(z))$; luego si el punto $x(z) = z'$ queda fijo por un conjugado de x_{qi}, $p(z')$ pertenece a la G-órbita de $p(z)$. $p(z) \in C_q$, y si $y \in C_q$, para $z \in p^{-1}(y)$, stab(z) es de orden q. En efecto, stab(y) está generado por $x_{qi} \in \Gamma/_K$; sea $x_{qi} = \theta(y_i)$; entonces orden$(y_i) \geq q$, luego y_i es elíptico con $y_i(z) = z$, luego por el lema 2.2., los grupos generados por x_{qi} y por y_i son isomorfos. Como stab(z) es de orden q impar, stab(z) tiene un generador conjugado de algún x_{qj}.

Lema 2.3. Las G-órbitas de puntos fijos de C_q están en biyección con las clases de conjugación de los x_{qi}, $i = 1,\dots,r_q$.

Demostración.

Sea $f(\{x_{qi}\}) = Gy_1$, donde $y_1 = p(z_1)$, z_1 punto fijo de x_{qi} en D. Como acabamos de ver, f es una aplicación bien definida y suprayectiva. Veamos que es inyectiva: sea $f(\{x_{qi}\}) = f(\{x_{qj}\})$ y sea z_2 punto fijo de x_{qj} en D. Entonces existe $t' \in G$, con $t'p(z_1) = p(z_2)$. Sea $x \in \theta^{-1}(t')$; se verifica que $p(x(z_1)) = t'p(z_1) = p(z_2)$, luego existe $k \in K$, tal que $kx(z_1) = z_2$. Así, $(kx)^{-1}x_{qj}kx(z_1) = (kx)^{-1}x_{qj}(z_2) = (kx)^{-1}(z_2) = z_1$, luego resulta que $(kx)^{-1}x_{qj}kx \in stab(z_1)$. Como x_{qi} genera $stab(z_1)$, x_{qj} es conjugado de alguna potencia de x_{qi}, luego $\{x_{qi}\} = \{x_{qj}\}$, |4|.

El número de puntos en la G-órbita de $y \in C_q$ es $\frac{n}{q} = q'$. El número de clases de conjugación en G de elementos de orden q es r_q. Luego el número de puntos en C_q es $q'r_q$.

Teorema 2.4. Si r_q es el número de periodos $m_i = q$, si $s'|n$, $s' \neq n$, y si $N(t^{s'})$ es el número de puntos fijos de $t^{s'}$, es

$$N(t^{s'}) = \sum_{\delta\delta'=s'} \delta' r_{\delta s}, \qquad ss' = n.$$

Demostración.

Sea $ss' = n$. Entonces, para cada q tal que $s|q$, hay una clase C_q de puntos fijos de $t^{s'} = t_s$. Luego

$$N(t^{s'}) = \sum_{s|q|n} q'r_q, \qquad qq' = n.$$

Llamemos a q', δ'. Como $s|q$, $\delta'|s'$. Sea δ tal que $\delta\delta' = s'$.

Entonces $q'\delta s = \delta'\delta s = s's = n$, luego $q = \delta s$, y es

$$N(t^{s'}) = \sum_{\delta\delta'=s'} \delta' r_{\delta s}.$$

Corolario 2.5. El elemento $t^{s'}$ de $^{\Gamma}/_{K}$ tiene la mitad de puntos fijos que el elemento $t^{s'}$ de $^{\Gamma^+}/_{K^+}$.

Demostración.

Si Γ tiene signatura

$$(\gamma,\pm,[m_1,\ldots,m_s],\{(—),\overset{k}{\ldots},(—)\}),$$

la signatura de Γ^+ es

$$(p,+,[m_1,m_1,\ldots,m_s,m_s],\{—\}),$$

siendo p el género algebraico de Γ, |37|. Por |30|, considerando $t^{s'}$ en $^{\Gamma^+}/_{K^+}$, es

$$N(t^{s'}) = 2\sum_{\delta\delta'=s'} \delta' r_{\delta s}.$$

Sean μ la función de Möbius, que vale $\mu(1) = 1$, $\mu(d) = 0$ si d admite algún factor cuadrático, y $\mu(d) = (-1)^k$ si d tiene k factores primos distintos; y ϕ la función de Euler, que asigna a n la cantidad de números m, tales que $1 \leq m < n$ y m primo con n, y vale

$$\phi(n) = n \prod_{\substack{\rho | n \\ \rho \text{ primo}}} \left(1-\frac{1}{\rho}\right), \qquad |10|.$$

Proposición 2.6. El elemento $t^{s'}$ de $^{\Gamma}/_{K}$ tiene un número de puntos fijos, $N(t^{s'})$, que vale

$$N(t^{s'}) = \frac{1}{\phi(s)} \sum_{dd'=s} d\mu(d')(1-p_d),$$

siendo p_d el género algebraico del grupo Γ_d.

Demostración. Como n es impar, también lo es d'. En el lema 2.1. hemos visto la existencia del grupo $\Gamma_{d'}$, que verifica $|\Gamma_{d'}:K| = d'$, y cuya signatura es

$$(\gamma_{d'},\pm,[\mu_1,\dots,\mu_r],\{(-),\overset{k_{d'}}{\dots},(-)\}),$$

siendo iguales los signos de $\Gamma_{d'}$ y K, y $k = 0$ si y sólo si $k_{d'} = 0$. Llamemos $p_{d'}$ al género algebraico de $\Gamma_{d'}$. Entonces la signatura de $\Gamma^+_{d'}$ es

$$(p_{d'},+,[\mu_1,\mu_1,\dots,\mu_r,\mu_r],\{-\}).$$

Según el teorema 2 de |30| el elemento $t^{s'}$ de $\Gamma^+/_{K^+}$ tiene un número de puntos fijos, $N(t^{s'})$, que viene dado por

$$N(t^{s'}) = \frac{1}{\phi(s)} \sum_{dd'=s} d\mu(d')(2-2p_d).$$

Luego, como por el corolario 2.5., el número de puntos fijos en $\Gamma/_K$ es la mitad, vale

$$\frac{1}{\phi(s)} \sum_{dd'=s} d\mu(d')(1-p_d).$$

Teorema 2.7. Sea $d|n$. El género algebraico del grupo Γ_d, p_d, vale

$$p_d = 1 + \frac{p-1}{d} - \frac{1}{d} \sum_{bb'=n} b'r_b(\mathrm{mcd}(b,d) - 1).$$

Demostración.

Sea $s > 1$, $s|n$. Entonces, por el teorema 2.4., es

$$N(t_s) = \sum_{\delta\delta'=s'} \delta' r_{\delta s}, \qquad ss' = n,$$

y por la proposición 2.6.,

$$N(t_s) = \frac{1}{\phi(s)} \sum_{dd'=s} d\mu(d')(1-p_d).$$

Igualando ambos valores, se tiene

$$\sum_{dd'=s} d\mu(d')(1-p_d) = \phi(s) \sum_{\delta\delta'=s'} \delta' r_{\delta s}.$$

Llamemos ahora $\lambda(s) = \phi(s) \sum_{\delta\delta'=s'} \delta' r_{\delta s}$, para $s > 1$, $s|n$; y

$\lambda(1) = 1-p$. Llamaremos también $\mu_{sd} = d\mu(d')$ si $d|s$, $dd' = s$; $\mu_{sd} = 0$, si $d\nmid s$; $\mu'_{de} = \frac{1}{d}$ si $e|d$; y $\mu'_{de} = 0$, si $e\nmid d$.

Cuando s,d,e recorren los divisores de n, consideremos las matrices cuadradas M y M', y las matrices columna Λ y Π, definidas como sigue:

$$M = \begin{pmatrix} \mu_{sd} \end{pmatrix}, \quad M' = \begin{pmatrix} \mu'_{de} \end{pmatrix}, \quad \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda(s) \end{pmatrix}, \quad \Pi = \begin{pmatrix} 1-p_d \end{pmatrix}.$$

Se verifica que $M\Pi = \Lambda$, $M' = M^{-1}$.

En efecto, $M\Pi = \Lambda$ se reduce a

$$\sum \mu_{sd}(1-p_d) = \lambda(s),$$

esto es,

$$\sum_{dd'=s} d\mu(d')(1-p_d) = \phi(s) \sum_{\delta\delta'=s'} \delta' r_{\delta s},$$

resultado que ya conocíamos.

Y $MM' = I$, pues el elemento (s,e) en MM' es

$$\sum_{d|n} \mu_{sd}\mu'_{de}.$$

Si $e\nmid d$, $\mu'_{de} = 0$, y si $d\nmid s$, $\mu_{sd} = 0$, luego si $e\nmid s$,

$\sum_{d|n} \mu_{sd}\mu'_{de} = 0$; si $e|s$, es $\sum_{d|n} \mu_{sd}\mu'_{de} = \sum_{e|d|s} d\mu(\frac{s}{d})\frac{1}{d} =$

$\sum_{e|d|s} \mu(\frac{s}{d}) = \sum_{\frac{d}{e}|\frac{s}{e}} \mu(\frac{s/e}{d/e})$. Luego, como $\sum_{a|b} \mu(a)$ vale 0 si $b > 1$ y vale 1 si $b = 1$, resulta que el elemento (s,e) de MM' vale 0 si $s \neq e$ y vale 1 si $s = e$; esto es, la matriz MM' es la matriz identidad.

En consecuencia, $\Pi = M'\Lambda$, o sea,

$$1-p_d = \sum_{s|n} \mu'_{ds}\lambda(s) = \sum_{s|d} \frac{\lambda(s)}{d},$$

de donde

$$d(1-p_d) = 1 - p + \sum_{1\neq s|d} \phi(s) \sum_{\delta\delta'=s'} \delta' r_{\delta s} =$$

$$= 1 - p - \sum_{\delta\delta'=n} \delta' r_\delta + \sum_{s|d} \phi(s) \sum_{\delta\delta'=s'} \delta' r_{\delta s}.$$

Sean ahora $\delta s = b$, $bb' = n$. El coeficiente de r_b es

$$\sum_{\substack{s|b\\ s|d}} \phi(s)\delta' = \sum_{s|\mathrm{mcd}(b,d)} \phi(s)b' = b' \sum_{s|\mathrm{mcd}(b,d)} \phi(s) =$$

$$= b' \,\mathrm{mcd}(b,d) \quad \text{(véase } |42|\text{)}.$$

Luego

$$d(1-p_d) = 1 - p - \sum_{\delta\delta'=n} \delta' r_\delta + \sum_{bb'=n} b' \,\mathrm{mcd}(b,d)\, r_b =$$

$$= 1 - p + \sum_{bb'=n} b' r_b (\mathrm{mcd}(b,d) - 1).$$

Despejando ahora p_d, se tiene

$$p_d = \frac{p-1}{d} + 1 + \frac{1}{d} \sum_{bb'=n} b' \, r_b \, (\text{mcd}(b,d) - 1).$$

<u>Teorema 2.8.</u> La signatura del grupo Γ_d es

$$\left(\gamma_d, \pm, \left[\left(\frac{m_i}{p_i} \right)^{\frac{n}{dp_i}}_{\substack{m_i \neq p_i \\ i=1,\ldots,s}} \right], \{ (—), \overset{k_d}{\ldots}, (—) \} \right),$$

siendo el signo el mismo de K, los valores p_i sometidos a la condición

$$n \sum_{j=1}^{s} \frac{1}{p_j} = n(p-1+s) - p + 1 - \sum_{bb'=n} b' \, r_b \, (\text{mcd}(b,d) - 1),$$

y el género algebraico el determinado por el teorema 2.7.

<u>Demostración.</u>

Como $[\Gamma : \Gamma_d] = d'$, $[\Gamma_d : K] = d$, y d, d' impares, pues factores de n, Γ_d tiene el mismo signo en su signatura que Γ y K, y tiene, o no, ciclo-periodos, según los tengan Γ y K.

Calculemos ahora los periodos propios. Llamemos $n_1, \ldots, n_t$ a los periodos propios de Γ_d. Por la proposición 2.2 de |5|, siendo $m_1, \ldots, m_s$ los periodos propios de Γ, y p_i el exponente de x_i módulo Γ_d, los periodos propios de Γ_d son

$$\left[\left(\frac{m_i}{p_i} \right)^{\frac{d'}{p_i}}_{\substack{m_i \neq p_i \\ i=1,\ldots,s}} \right].$$

Además, como es $d' = \frac{|\Gamma_d|}{|\Gamma|}$, $d' = \frac{n}{d}$, resulta

$$\frac{n}{d} = \frac{p_d - 1 + \sum\limits_{i=1}^{t}(1-\frac{1}{n_i})}{p - 1 + \sum\limits_{j=1}^{s}(1-\frac{1}{m_j})} =$$

$$= \frac{\frac{p-1}{d} + \frac{1}{d}\sum\limits_{bb'=n} b'r_b(\mathrm{mcd}(b,d)-1) + \sum\limits_{j=1}^{s}\frac{n}{dp_j}(1-\frac{1}{m_j/p_j})}{p - 1 + \sum\limits_{j=1}^{s}(1-\frac{1}{m_j})}.$$

Luego

$$n = \frac{p - 1 + \sum\limits_{bb'=n} b'r_b(\mathrm{mcd}(b,d)-1) + \sum\limits_{j=1}^{s}\frac{n}{p_j} - \sum\limits_{j=1}^{s}\frac{n}{m_j}}{p - 1 + \sum\limits_{j=1}^{s}(1-\frac{1}{m_j})}.$$

Así, se tiene

$$\sum_{j=1}^{s}\frac{n}{p_j} = n(p-1+\sum_{j=1}^{s}(1-\frac{1}{m_j}))-p+1-\sum_{bb'=n} b'r_b(\mathrm{mcd}(b,d)-1)+\sum_{j=1}^{s}\frac{n}{m_j} =$$

$$= n(p-1+s) - p + 1 - \sum_{bb'=n} b'\, r_b\,(\mathrm{mcd}(b,d) - 1).$$

Corolario 2.9. Si d es primo, la signatura de Γ_d es

$$(\gamma_d, \pm, \left[\begin{array}{l} (d)^{\frac{n}{m_i}} \\ \quad i\in\{i_1,\dots,i_v\} \\ \quad \subset\{1,\dots,s\} \end{array}\right], \{(—),\overset{k_d}{\dots},(—)\}),$$

siendo el signo el mismo de K, y el género algebraico el determinado por el teorema 2.7.

Demostración.

Como K es subgrupo de Γ_d, de índice d, se pueden aplicar los teoremas 4 de |14| y 2 de |37|, y en consecuencia, es

$$\frac{m_i}{p_i} | d, \quad i = 1,\ldots,s.$$

Luego si d es primo, y $m_i \neq p_i$, es $\frac{m_i}{p_i} = d$, y entonces

$$\frac{n}{dp_i} = \frac{n}{m_i}.$$

CAPITULO 3.- ORDEN DEL GRUPO DE AUTOMORFISMOS DE UNA SUPERFICIE DE KLEIN.

En el estudio de los grupos de automorfismos de una superficie se plantea como problema natural la acotación del orden del grupo según el género de la superficie.

Para superficies de Riemann el resultado más general fue obtenido por Hurwitz, que probó en |15| que el orden de un grupo de automorfismos de una superficie de Riemann de género g es menor o igual que $84(g-1)$. Macbeath |20| demostró que esta cota se alcanza para una colección infinita de géneros, pero también |19| que hay otra colección infinita para la que no se alcanza. Por otra parte, Accola |1| y Maclachlan |25| probaron que siempre hay un grupo de orden $\geqslant 8(g+1)$, y que esta cota se alcanza para una familia infinita de géneros. Por último, Kiley |17| construye tres conjuntos infinitos de géneros para los cuales se mejora la acotación de Accola y Maclachlan.

En cuanto a las superficies de Klein con borde, May probó |28| que las de género algebraico g no pueden tener más de $12(g-1)$ automorfismos, y |27| que esta cota se alcanza para infinitos géneros, pero también |29| que hay otra familia infinita de géneros que no la alcanzan. Por otro lado, también May |28| demostró que siempre hay un grupo de orden mayor o igual que $4(g+1)$, y que para una colección infinita de géneros se alcanza esta cota.

En este capítulo probamos que existe una familia infinita de géneros, para cada uno de los cuales existe una superficie que admite un grupo de automorfismos de orden $6(g-1)$.

Para obtener este resultado, necesitamos establecer primero un lema sobre subgrupos normales de un grupo NEC.

Lema 3.1. Sea Γ un grupo NEC, y Γ_0 un subgrupo normal de Γ, tal que $[\Gamma:\Gamma_0] = N$. Si Γ tiene un único ciclo-periodo, que es vacío, y se verifica:

i) c_{10} es la reflexión de Γ que da el ciclo-periodo.

ii) e_1 es el elemento hiperbólico correspondiente.

iii) k_1 es el menor número natural para el que $e_1^{k_1} \in \Gamma_0$.

iv) $c_{10} \in \Gamma_0$.

Entonces, en Γ_0 hay N/k_1 ciclo-periodos, todos vacíos.

Demostración. Existe una región fundamental para Γ, que es un polígono P que se puede denotar de la forma

$$\varepsilon_1 \gamma_{10} \varepsilon_1' A.$$

c_{10} es el elemento de Γ que deja fijo γ_{10}, e_1 es el elemento que transforma ε_1' en ε_1.

Por |5| sabemos que si $e_1 \in \Gamma$ y k_1 es el mínimo número con $e_1^{k_1} \in \Gamma_0$, es

$$(*) \quad \frac{\Gamma}{\Gamma_0} = \{\Gamma_0, e_1\Gamma_0, \ldots, e_1^{k_1-1}\Gamma_0, \beta_2\Gamma_0, \ldots, \beta_2 e_1^{k_1-1}\Gamma_0, \ldots,$$

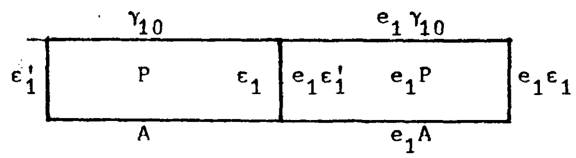
$$\ldots, \beta_{N/k_1}\Gamma_0, \ldots, \beta_{N/k_1} e_1^{k_1-1}\Gamma_0\},$$

luego por | 5 | P' es una región fundamental para Γ_0, siendo

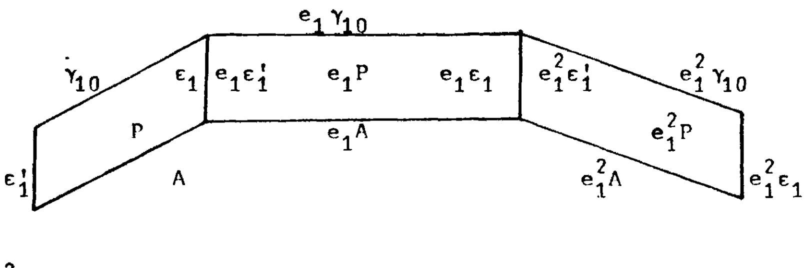
$$P' = P \cup e_1 P \cup \cdots \cup e_1^{k_1-1} P \cup \beta_2 P \cup \cdots \cup \beta_2 e_1^{k_1-1} P \cup \cdots \cup \beta_{N/k_1} e_1^{k_1-1} P.$$

Vamos a construir la región P'. Empecemos para ello por construir $P \cup e_1 P \cup \cdots \cup e_1^{k_1-1} P$.

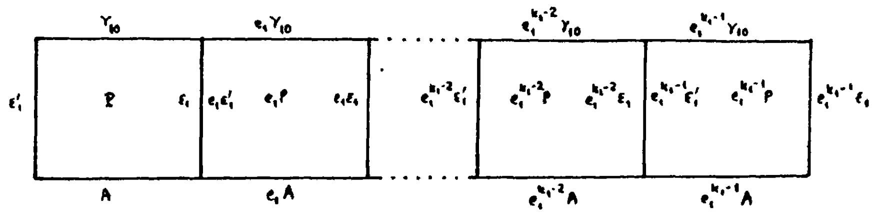
Dibujando $P \cup e_1 P$, tenemos



pues $e_1(\varepsilon_1') = \varepsilon_1$. Si repetimos el proceso, tenemos



pues $e_1^2(\varepsilon_1') = e_1(e_1(\varepsilon_1')) = e_1(\varepsilon_1)$. Siguiendo el proceso hasta $e_1^{k_1-1} P$, se tiene



Podemos realizar el mismo proceso, para $j = 2,\dots,N/k_1$, con los subconjuntos

$$\beta_j P \cup \beta_j e_1 P \cup \dots \cup \beta_j e_1^{k_1-1} P =$$
$$= \beta_j (P \cup e_1 P \cup \dots \cup e_1^{k_1-1} P),$$

pues al aplicar β_j a la región anterior resulta una equivalente.

Veamos ahora que dado

$$\beta_j e_1^{k_1-1} \varepsilon_1, \beta_j e_1^{k_1-1} \gamma_{10}, \beta_j e_1^{k_1-2} \gamma_{10}, \dots, \beta_j e_1 \gamma_{10}, \beta_j \gamma_{10}, \beta_j \varepsilon_1',$$

con $j = 1,\dots,N/k_1$, y $\beta_1 = 1$, se tiene para cada j un hueco en la superficie al considerar la identificación producida en la región fundamental por Γ_0. Lo veremos para β_1.

Sea pues

$$e_1^{k_1-1} \varepsilon_1, e_1^{k_1-1} \gamma_{10}, \dots, e_1 \gamma_{10}, \gamma_{10}, \varepsilon_1'.$$

Entonces,

1°Hay una transformación en Γ_0 que envía ε_1' sobre $e_1^{k_1-1} \varepsilon_1$.

2°No hay ninguna transformación en Γ_0 que envíe un punto de $\gamma_{10}, e_1\gamma_{10}, \dots, e_1^{k_1-1} \gamma_{10}$ a otro punto de P'.

En efecto,

1° Como $e_1^{k_1} \in \Gamma_0$, y $e_1^{k_1}(\varepsilon_1') = e_1^{k_1-1}(e_1(\varepsilon_1')) = e_1^{k_1-1} \varepsilon_1$, la transformación buscada es $e_1^{k_1}$.

2° a) Sea $\beta \in \Gamma_0$ que transforme $p \in e_1^r \gamma_{10}$ en $q \in e_1^r \gamma_{10}$;

entonces $e_1^{-r}(q) = q' \in \gamma_{10}$, $e_1^{-r}(p) = p' \in \gamma_{10}$; luego resulta $e_1^{-r} \beta e_1^r(p') = q'$, imposible.

b) Sea $\beta \in \Gamma_0$ que transforme $p \in e_1^r \gamma_{10}$ en $q \in$ $\in e_1^s \gamma_{10}$; entonces $e_1^{-r}(p) = p' \in \gamma_{10}$, $e_1^{-s}(q) = q' \in \gamma_{10}$, luego $e_1^{-s} \beta e_1^r(p') = q'$, imposible.

c) Sea $\beta \in \Gamma_0$ que transforme $p \in e_1^r \gamma_{10}$ en $q \in$ $\in \beta_h e_1^s \gamma_{10}$; entonces $e_1^{-r}(p) = p' \in \gamma_{10}$, $e_1^{-s} \beta_h^{-1}(q) = q' \in \gamma_{10}$; si $p' \neq q'$, se sigue como en b); si $p' = q'$, se tiene $e_1^{-s} \beta_h^{-1} \beta e_1^r(p') = p'$, luego $e_1^{-s} \beta_h^{-1} \beta e_1^r \in \Gamma_0$, y es $\beta_h e_1^s \Gamma_0 = e_1^r \Gamma_0$, imposible por (*).

d) Sea $\beta \in \Gamma_0$ que transforme $p \in e_1^r \gamma_{10}$ en un punto de P' que no sea del tipo $\beta_h e_1^s \gamma_{10}$. Entonces resulta que dos puntos de P, uno en γ_{10} y otro en otro lado del polígono, se relacionan mediante una transformación de Γ_0, imposible.

Luego, por cumplirse 1° y 2°, cada $j = 1, \ldots, N/k_1$ determina una familia $\beta_j \varepsilon_1', \ldots, \beta_j e_1^{k_1 - 1} \varepsilon_1$, que da un hueco en la superficie al identificar P' por Γ_0.

Según vimos en el capítulo 1, cada hueco de la superficie corresponde a un ciclo-periodo; y los periodos del ciclo-periodo son la mitad del orden del grupo estabilizador en Γ_0 de los vértices. Luego, como en nuestro caso ninguno de los vértices es punto fijo de una transformación en Γ_0, se obtienen N/k_1 ciclo-periodos vacíos.

Una vez que disponemos de este resultado, lo vamos a utilizar para construir el grupo de automorfismos que deseamos.

Teorema 3.2. Para todo entero $k \geq 1$, existe una superficie de Klein, de género algebraico $p = 1 + 4k^2$, con $6k$ componentes en el borde, que admite un grupo de automorfismos de orden $6(p-1) > 4(p+1)$.

Demostración. Consideremos el grupo G de generadores

$$x,\ y,$$

y relaciones

$$x^2 = y^3 = (xy)^{4k} = (x^{-1}y^{-1}xy)^3 = 1.$$

Este grupo, que Coxeter denomina $(2,3,4k;3)$ es de orden $24k^2$ |11|.

Establecemos ahora el siguiente epimorfismo del grupo NEC de signatura $(0,+,[2,3],\{(-)\})$ sobre G:

$$\begin{array}{rcl} \theta: \Gamma:(0,+,[2,3],\{(-)\}) & \longrightarrow & G:(2,3,4k;3) \\ x_1 & \longmapsto & x \\ x_2 & \longmapsto & y \\ e_1 & \longmapsto & (xy)^{-1} \\ c_{10} & \longmapsto & 1 \end{array}$$

θ es, evidentemente, un epimorfismo, y $\ker \theta$, según el lema 3.1., es un grupo NEC Γ_0 de signatura

$$(g,+,[-],\{(-),\overset{6k}{\ldots},(-)\}),$$

pues $4k$ es el menor entero q tal que $e_1^q \in \Gamma_0$.

En consecuencia, G es grupo de automorfismos de la superficie de Klein orientable, de género topológico g y $6k$ componentes en el borde. Luego, según vimos en el capítulo 1,

$$\text{orden}(G) = 24k^2 = \frac{|\Gamma_0|}{|\Gamma|} = \frac{2g - 2 + 6k}{-2+\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+1} = \frac{(2g+6k-1)-1}{\frac{1}{6}} = 6(p-1),$$

pues $p = 2g + 6k - 1$.

Así, se tiene $\text{orden}(G) = 6(p-1)$, y es $p - 1 = 4k^2$, luego este resultado se tiene para todo valor de p tal que $p = 4k^2 + 1$.

Cuando es $k = 1$, se tiene $p = 5$, y entonces $6(p-1) = 24 = 4(p+1)$. Y para valores de $k > 1$, ya se mejora la cota $4(p+1)$.

CAPITULO 4.- GRUPOS DE AUTOMORFISMOS DE SUPERFICIES DE KLEIN, DE ORDEN PRIMO.

En el presente capítulo, estudiamos cuál es el máximo orden posible de un grupo de automorfismos de una superficie de Klein, supuesto que este orden sea primo. Este problema ha sido abordado para superficies de Riemann por Moore |30|; y nosotros utilizaremos sus resultados para el estudio de todas las superficies de Klein, orientables y no orientables, que no sean de Riemann.

Se obtienen cotas para el orden del grupo en función del género algebraico de la superficie; y se estudia en qué condiciones del género topológico y del número de componentes en el borde se alcanzan estas cotas, o bien se pueden refinar.

Este tipo de acotaciones en los órdenes de los automorfismos tiene un interés práctico para el cálculo de los grupos de automorfismos de determinadas superficies de Klein. Así, por ejemplo, estas cotas coinciden con los resultados de |9| para curvas algebraicas reales.

Consideremos una superficie de Klein, S, que no sea de Riemann. Entonces S se puede expresar como $D/_K$, donde K es un grupo NEC, de signatura $(g,-,[—],\{—\})$, $(g,+,[—],\{(—),\overset{k}{\ldots},(—)\})$ ó $(g,-,[—],\{(—),\overset{k}{\ldots},(—)\})$, según que la superficie sea sin borde, orientable con borde, o no orientable con borde.

Si G es un grupo de automorfismos de S, de orden impar, es $G = {}^{\Gamma}/_{K}$, donde Γ es un grupo NEC, cuya signatura es respectivamente $(\gamma,-,[\mu_1,\dots,\mu_r],\{—\})$, $(\gamma,+,[\mu_1,\dots,\mu_r],\{(—),\overset{k'}{\dots},(—)\})$ ó $(\gamma,-,[\mu_1,\dots,\mu_r],\{(—),\overset{k'}{\dots},(—)\})$, |5|.

Recordemos que por el corolario 2.5., un elemento de ${}^{\Gamma}/_{K}$ tiene la mitad de puntos fijos que si se considera como elemento de ${}^{\Gamma^+}/_{K^+}$. Llamaremos $N(t)$ al número de puntos fijos de t.

Enunciaremos ahora el resultado principal que obtiene Moore para superficies de Riemann, y que utilizaremos en nuestro estudio:

Lema 4.1. |30| Sea S una superficie de Riemann de género g. Sean K el grupo fuchsiano $(g,+,[—],\{—\})$, y G un grupo de automorfismos de S, de orden primo $\neq 2$, esto es, $G = {}^{\Gamma}/_{K}$, donde Γ tiene signatura $(\gamma,+,[\mu_1,\dots,\mu_r],\{—\})$. Entonces, si el orden de G, n, es mayor que g, ha de ser

i) $n = 2g + 1$, $N(t) = 3$, $\gamma = 0$, ó

ii) $n = g + 1$, $N(t) = 4$, $\gamma = 0$.

Y si es $n = g$, ha de ser

i) $n = g = 3$, $N(t) = 5$, $\gamma = 0$, ó

ii) $n = g$, $N(t) = 2$, $\gamma = 1$.

Teorema 4.2. Sea S una superficie de Klein, de género algebraico p. Sea G un grupo de automorfismos de S, de orden primo n. Entonces, si S es no orientable sin borde, u orientable con borde, $n \leqslant p+1$; y si S es no orientable con borde, $n \leqslant p$.

Demostración.

1. Sea S no orientable, sin borde, de género g. Enton-

ces es $S = {}^{D}/_{K}$, siendo $K: (g,-,[-],\{-\})$, y el grupo $G = {}^{\Gamma}/_{K}$. Si el orden de G es impar, la signatura de Γ es

$$(\gamma,-,[\mu_1,\dots,\mu_r],\{-\}).$$

Consideremos ahora los subgrupos fuchsianos canónicos de Γ y K, que son Γ^+: $(\gamma-1,+,[\mu_1,\mu_1,\dots,\mu_r,\mu_r],\{-\})$, y K^+, de signatura $(g-1,+,[-],\{-\})$, |37|. Como $[\Gamma:\Gamma^+] = [K:K^+] = 2$, es también $[\Gamma^+:K^+] = n$.

Aplicando ahora el lema 4.1., si $n > g-1$, ha de ser:

i) $n = 2(g-1) + 1$, $N(t) = 3$, $\gamma-1 = 0$, ó

ii) $n = (g-1) + 1$, $N(t) = 4$, $\gamma-1 = 0$.

No se puede dar el caso i), pues el número de puntos fijos considerando ${}^{\Gamma}/_{K}$ es la mitad que el de puntos fijos considerando ${}^{\Gamma^+}/_{K^+}$, y ha de ser entero.

Así, el máximo n primo posible es $n = g = p+1$, y entonces $N(t) = {}^{4}/_{2} = 2$, $\gamma = 1$.

Esta cota se alcanza para todo g primo. En efecto, $\Gamma: (1,-,[g,g],\{-\})$ verifica las condiciones del teorema 3.7. de |7| , luego existe un epimorfismo de Γ sobre ${}^{Z}/_{n}$ con núcleo $K: (g,-,[-],\{-\})$, y es

$$n = \frac{g-2}{1-2+2(1-1/g)} = \frac{g^2-2g}{g-2} = g.$$

2. Sea S orientable, con borde, de género algebraico p. Entonces es $S = {}^{D}/_{K}$, siendo $K: (g,+,[-],\{(-),\overset{k}{\dots},(-)\})$, con $p = 2g+k-1$; y el grupo $G = {}^{\Gamma}/_{K}$, luego la signatura de Γ es $(\gamma,+,[\mu_1,\dots,\mu_r],\{(-),\overset{k'}{\dots},(-)\})$. Los subgrupos fuchsianos canónicos de Γ y K son Γ^+: $(2\gamma+k'-1,+,[\mu_1,\mu_1,\dots,\mu_r,\mu_r],\{-\})$, y

K^+: $(2g+k-1,+,[—],\{—\})$, luego K^+: $(p,+,[—],\{—\})$.

Aplicando el lema 4.1., si $n > p$, ha de ser

i) $n = 2p + 1$, $N(t) = 3$, $2\gamma+k'-1 = 0$, ó

ii) $n = p + 1$, $N(t) = 4$, $2\gamma+k'-1 = 0$.

Nuevamente, el caso i) no puede darse, y así el máximo n primo posible es $n = p + 1$, $N(t) = {}^4/_2 = 2$, $2\gamma+k'-1 = 0$. Como $k' \neq 0$, ha de ser $\gamma = 0$, $k' = 1$.

3. Sea S no orientable, con borde, de género algebraico p. Entonces es $S = {}^D/_K$, siendo K: $(g,-,[—],\{(—),\overset{k}{\ldots},(—)\})$, con $p = g+k-1$, y el grupo $G = {}^\Gamma/_K$, luego la signatura de Γ es $(\gamma,-,[\mu_1,\ldots,\mu_r],\{(—),\overset{k'}{\ldots},(—)\})$. Los subgrupos fuchsianos canónicos de Γ y K son Γ^+: $(\gamma+k'-1,+,[\mu_1,\mu_1,\ldots,\mu_r,\mu_r],\{—\})$, y K^+: $(g+k-1,+,[—],\{—\})$, luego K^+: $(p,+,[—],\{—\})$.

Aplicando el lema 4.1., si $n > p$, ha de ser

i) $n = 2p + 1$, $N(t) = 3$, $\gamma+k'-1 = 0$, ó

ii) $n = p + 1$, $N(t) = 4$, $\gamma+k'-1 = 0$.

El caso i), como antes, es imposible; pero, además, como $\gamma \neq 0$, $k' \neq 0$, tampoco puede ser $\gamma+k'-1 = 0$, luego el caso ii) es también imposible, Así, nunca puede ser $n > p$.

Veamos ahora cuándo es $n = p$. Por el lema 4.1., puede ser

i) $n = p = 3$, $N(t) = 5$, $\gamma+k'-1 = 0$, ó

ii) $n = p$, $N(t) = 2$, $\gamma+k'-1 = 1$.

El caso i) es imposible, pues ni puede ser $N(t)$ impar ni $\gamma+k'-1 = 0$, luego sólo se puede dar el caso ii), y entonces $n = p$, $N(t) = {}^2/_2 = 1$, y $k' = \gamma = 1$.

Ha quedado, pues, probado el teorema.

Hemos visto las mejores cotas que se pueden obtener en función del género algebraico; veremos ahora cuándo estas cotas se pueden refinar, dependiendo del género topológico y del número de componentes en el borde.

En el caso 1, el de las superficies no orientables sin borde, el género algebraico y el topológico se determinan mutuamente, por lo que ya hemos probado que siempre que $p+1=g$ sea primo se alcanza esta cota.

A continuación estudiaremos, en las superficies con borde, para qué géneros topológicos se alcanzan las cotas que hemos obtenido.

<u>Proposición 4.3.</u> Sea S una superficie de Klein orientable, con borde, de género algebraico p. 1° Si $p+1$ es primo, existe un grupo de automorfismos de S, de orden $p+1$, si y sólo si S tiene 1 ó $p+1$ componentes en el borde, y género topológico $\frac{p}{2}$ y 0, respectivamente. 2° Si p es primo, existe un grupo de automorfismos de S, de orden p, si y sólo si S tiene 2 ó $p+1$ componentes en el borde, y género topológico $\frac{p-1}{2}$ y 0, respectivamente. 3° En los demás casos, los grupos de automorfismos de S de orden primo tienen orden menor que p.

<u>Demostración.</u>

Sea n el orden del grupo de automorfismos G. Por el teorema 4.2., si $n>p$, es $n=p+1$, y siendo $S={}^{D}/_{K}$, donde $K: (g,+,[-],\{(-),\overset{k}{\ldots},(-)\})$, con $2g+k-1=p$, es $G={}^{\Gamma}/_{K}$, con $\Gamma: (0,+,[\mu_1,\ldots,\mu_r],\{(-)\})$. En consecuencia, por el lema 3.1.,

$k|p+1$, luego ha de ser $k = 1$, ó $k = p+1$.

Si es $k = 1$, $K: (\frac{p}{2},+,[—],\{(—)\})$; y entonces el grupo Γ de signatura $(0,+,[p+1,p+1],\{(—)\})$ cumple las condiciones del teorema 3.5. de |8|, y es $\ker\theta: (g,+,[—],\{(—)\})$. Como

$$p+1 = \frac{2g-1}{-1+2(1-1/(p+1))} = \frac{2g-1}{\frac{p-1}{p+1}} = \frac{(2g-1)(p+1)}{p-1}$$

resulta $2g-1 = p-1$, luego $g = \frac{p}{2}$, y $\ker\theta = K$; luego hay un epimorfismo de Γ sobre $Z/_{p+1}$, con núcleo K.

Si es $k = p+1$, $K: (0,+,[—],\{(—),\overset{p+1}{\ldots},(—)\})$; sea Γ el grupo $(0,+,[p+1,p+1],\{(—)\})$, y consideremos el siguiente epimorfismo:

$$\begin{aligned} \theta : \Gamma : (0,+,[p+1,p+1],\{(—)\}) &\longrightarrow Z/_{p+1} \\ x_1 &\longmapsto \bar{1} \\ x_2 &\longmapsto \bar{p} \\ e_1 &\longmapsto \bar{0} \\ c_{10} &\longmapsto \bar{0} \end{aligned}$$

Por el lema 3.1., $\ker\theta: (g,+,[—],\{(—),\overset{p+1}{\ldots},(—)\})$, y como es

$$p+1 = \frac{2g+p-1}{\frac{p-1}{p+1}} = \frac{(2g+p-1)(p+1)}{p-1},$$

es $g = 0$, luego $\ker\theta = K$.

Veamos ahora cuándo es $n = p$, con p primo. Por el lema 4.1., ha de ser $2\gamma+k'-1 = 1$, luego es $\gamma = 0$, $k' = 2$. Esto es, $\Gamma: (0,+,[\mu_1,\ldots,\mu_r],\{(—)(—)\})$. Aplicando nuevamente el lema 3.1., cada ciclo-periodo de Γ produce k_i ciclo-periodos en K, con $k_i|p$, luego $k_i = 1$ ó $k_i = p$. Como $K: (g,+,[—],\{(—),\overset{k}{\ldots},(—)\})$ con $2g+k-1 = p$, es $k = 2$, ó $k = p+1$, ó $k = 2p$, y obviamente

$k = 2p$ es imposible.

Si es $k = 2$, K: $(\frac{p-1}{2},+,[-],\{(-)(-)\})$; sea Γ el grupo de signatura $(0,+,[p],\{(-)(-)\})$, y consideremos el siguiente epimorfismo:

$$\begin{aligned}
\theta : \Gamma : (0,+,[p],\{(-)(-)\}) &\longrightarrow Z/_p \\
x_1 &\longmapsto \bar{1} \\
e_1 &\longmapsto \overline{\tfrac{p-1}{2}} \\
e_2 &\longmapsto \overline{\tfrac{p-1}{2}} \\
c_{10} &\longmapsto \bar{0} \\
c_{20} &\longmapsto \bar{0}
\end{aligned}$$

Por el lema 3.1., $\ker\theta$: $(g,+,[-],\{(-)(-)\})$, y como es

$$p = \frac{2g}{1-\frac{1}{p}} = \frac{2gp}{p-1},$$

resulta $2g = p-1$, luego $g = \frac{p-1}{2}$, y es $\ker\theta = K$.

Si es $k = p+1$, K: $(0,+,[-],\{(-),\overset{p+1}{\ldots},(-)\})$, sea Γ el grupo $(0,+,[p],\{(-)(-)\})$, y consideremos el siguiente epimorfismo:

$$\begin{aligned}
\theta : \Gamma : (0,+,[p],\{(-)(-)\}) &\longrightarrow Z/_p \\
x_1 &\longmapsto \bar{1} \\
e_1 &\longmapsto \overline{p-1} \\
e_2 &\longmapsto \bar{0} \\
c_{10} &\longmapsto \bar{0} \\
c_{20} &\longmapsto \bar{0}
\end{aligned}$$

Por el lema 3.1., $\ker\theta$: $(g,+,[-],\{(-),\overset{p+1}{\ldots},(-)\})$, y como es

$$p = \frac{2g+p-1}{1-\frac{1}{p}} = \frac{(2g+p-1)p}{p-1},$$

resulta $g = 0$, y $\ker\theta = K$.

Proposición 4.4. Sea S una superficie de Klein no orientable, con borde, de género algebraico p. 1° Si p es primo, existe un grupo de automorfismos de S, de orden p, si y sólo si S tiene 1 ó p componentes en el borde, y género topológico p y 1, respectivamente. 2° En los demás casos, los grupos de automorfismos de S de orden primo tienen orden menor que p.

Demostración.

Por el teorema 4.2., si $n = p$, es $S = {}^{D}/_{K}$, K tiene signatura $(g,-,[-],\{(-),\overset{k}{\ldots},(-)\})$, con $g+k-1 = p$, y es $G = {}^{\Gamma}/_{K}$, donde $\Gamma : (1,-,[\mu_1,\ldots,\mu_r],\{(-)\})$. En consecuencia, por el lema 3.1., $k|p$, luego $k = 1$ ó $k = p$.

Si es $k = 1$, $K: (p,-,[-],\{(-)\})$; entonces el grupo Γ de signatura $(1,-,[p],\{(-)\})$ cumple las condiciones del teorema 3.6. de |8|, luego existe un epimorfismo de Γ sobre ${}^{Z}/_{p}$ de núcleo $\ker\theta : (g,-,[-],\{(-)\})$, y es

$$p = \frac{g-1}{1-\frac{1}{p}} = \frac{(g-1)p}{p-1},$$

luego es $g = p$, y $\ker\theta = K$.

Si es $k = p$, $K: (1,-,[-],\{(-),\overset{p}{\ldots},(-)\})$; sea el grupo Γ de signatura $(1,-,[p],\{(-)\})$, y consideremos el epimorfismo

$$\begin{aligned} \theta : \Gamma : (1,-,[p],\{(-)\}) &\longrightarrow {}^{Z}/_{p} \\ x_1 &\longmapsto \overline{1} \\ d_1 &\longmapsto \overline{\tfrac{p-1}{2}} \\ e_1 &\longmapsto \overline{0} \\ c_{10} &\longmapsto \overline{0} \end{aligned}$$

Por el lema 3.1., $\ker\theta : (g,-,[—],\{(—),\overset{p}{\ldots},(—)\})$, y por la relación de áreas, $g = 1$, luego $\ker\theta = K$.

<u>Corolario 4.5.</u> Sea V una curva algebraica real de género g. Entonces el máximo orden primo posible de un grupo de automorfismos de V es $g+1$ si la superficie de Klein asociada a la curva es orientable, y g si es no orientable.

<u>Demostración.</u>

Por |2,3| , existe una equivalencia funtorial entre la categoría de las superficies de Klein compactas con borde, y la de las curvas algebraicas reales. Así, cada superficie de Klein compacta con k componentes en el borde, tiene asociada una curva algebraica real que tiene un modelo liso acotado con k componentes conexas, y recíprocamente.

Además, los grupos de automorfismos de la curva y de la superficie són isomorfos, |9|.

En consecuencia, si V tiene género g y su superficie de Klein asociada es orientable, por el teorema 4.2. el máximo orden primo posible de un grupo de automorfismos de V es $g+1$; y si la superficie asociada es no orientable, el máximo orden es g.

CAPITULO 5.- GRUPOS ABELIANOS DE AUTOMORFISMOS DE SUPERFICIES DE KLEIN SIN BORDE

Como indicamos en el capítulo 3, uno de los primeros problemas planteados en el estudio de los automorfismos de las superficies fue la acotación de su número según el género de la superficie. El problema fue estudiado especialmente por Hurwitz y Macbeath, para superficies de Riemann, y por May, para superficies de Klein.

Las cotas obtenidas por estos autores pueden considerarse como casos particulares de un problema más general: el de hallar el mínimo género de la superficie para la cual un grupo finito dado es grupo de automorfismos.

Este problema ha sido resuelto, en las superficies de Riemann, por Harvey |14| cuando el grupo es cíclico, y por Maclachlan |24| cuando es abeliano no cíclico. Para superficies de Klein no orientables sin borde, el problema para grupos cíclicos ha sido resuelto por Bujalance |7|.

En este capítulo estudiamos la cuestión para los grupos abelianos no cíclicos de orden impar, como grupos de automorfismos de superficies de Klein sin borde, no orientables.

Como consecuencia, se obtienen resultados sobre el máximo orden impar posible de un grupo abeliano de automorfismos de una superficie de género dado, y se estudia qué grupos se pueden dar en las superficies de género bajo.

En lo que sigue, consideraremos siempre la descomposición canónica de los grupos abelianos de tipo finito, como suma directa de grupos cíclicos cuyos órdenes se dividen sucesivamente. En consecuencia, al escribir

$$G = Z/_{m_1} \oplus Z/_{m_2} \oplus \dots \oplus Z/_{m_s},$$

se entenderá siempre $m_1|m_2|\dots|m_{s-1}|m_s$. Llamaremos generadores canónicos a los generadores de los grupos cíclicos $Z/_{m_i}$.

Por otra parte, desde ahora llamaremos $\ell(\Gamma) = \frac{|\Gamma|}{2\pi}$.

Un grupo G es grupo de automorfismos de una superficie de Klein no orientable, sin borde, de género g, si y sólo si hay un grupo NEC Γ, y un epimorfismo θ de Γ sobre G, tal que $\ker\theta$ es un grupo NEC de signatura $(g,-,[\text{—}],\{\text{—}\})$, que llamaremos K.

Es entonces $G = \Gamma/_K$.

Sea G un grupo abeliano, no cíclico, de orden N impar. Entonces es $G = Z/_{m_1} \oplus \dots \oplus Z/_{m_s}$, con $s > 1$, $m_i|m_{i+1}$, m_i impares, y $\prod_{i=1}^{s} m_i = N$.

Como N es impar, y K subgrupo normal de Γ, la signatura de Γ es de la forma $(\gamma,-,[\mu_1,\dots,\mu_r],\{\text{—}\})$, |5|.

Entonces, es

$$\text{orden } (G) = \frac{|K|}{|\Gamma|} = \frac{g-2}{\gamma-2+\sum_{i=1}^{r}(1-\frac{1}{\mu_i})},$$

luego

$$\frac{g-2}{N} = \gamma - 2 + \sum_{i=1}^{r}(1-\frac{1}{\mu_i}) = \ell(\Gamma).$$

Nuestro problema es minimizar el género de la superficie para la que G es grupo de automorfismos; en consecuencia debemos hallar el grupo Γ, en las condiciones anteriores, que minimice $\mu(\Gamma)$.

Como la signatura de Γ es $(\gamma,-,[\mu_1,\ldots,\mu_r],\{-\})$, este grupo tiene generadores $x_1,\ldots,x_r,d_1,\ldots,d_\gamma$,

$$\text{y relaciones} \quad x_1^{\mu_1} = \ldots = x_r^{\mu_r} = x_1\ldots x_r d_1^2\ldots d_\gamma^2 = 1.$$

El epimorfismo buscado existe pues si y sólo si existe un conjunto de generadores de G, $\xi_1,\ldots,\xi_r,\delta_1,\ldots,\delta_\gamma$, tales que $\xi_1^{\mu_1} = \ldots = \xi_r^{\mu_r} = \xi_1\ldots\xi_r\delta_1^2\ldots\delta_\gamma^2 = 1$, con orden$(\xi_i) = \mu_i$.

Para minimizar $\mu(\Gamma)$ vamos a distinguir dos casos según la signatura de Γ.

1. Sea $r = 0$, esto es, $\Gamma:(\gamma,-,[-],\{-\})$. Entonces $\mu(\Gamma) = \gamma-2$, con $\gamma \geq 3$. Como el número mínimo de generadores de G es s, el mínimo γ ha de ser $s+1$, luego

$$\min_{r=0}(\mu(\Gamma)) = s-1;$$

en efecto, si $r = 0$, los únicos generadores de Γ son los d_j: entonces $d_1,\ldots,d_s$ proporcionan sus imágenes $\delta_1,\ldots,\delta_s$, generadores de G, y d_{s+1} es tal que $d_1^2\ldots d_s^2 d_{s+1}^2 = 1$.

2. Sea $r \neq 0$. Entonces $\Gamma:(\gamma,-,[\mu_1,\ldots,\mu_r],\{-\})$. Llamaremos N_γ al conjunto de grupos Γ que son justamente de género γ. Así, buscamos $\min_\gamma(\min(\mu(\Gamma))|\Gamma\in N_\gamma)$.

Para obtener este mínimo, haremos una construcción que nos permitirá escoger un conjunto óptimo de generadores del grupo G. Esta construcción está inspirada en la dada por Maclachlan en |24|, para grupos fuchsianos. Enunciaremos simplemente los resultados de Maclachlan que se aplican diréctamente a nuestro caso, y demostraremos aquéllos en los que la presencia de elementos no orientables plantea diferencias.

Definición 5.1. Sea un grupo abeliano A, y sean dos conjuntos ordenados de elementos de A, X y K, tales que $X \cup K$ genera A. Llamaremos a (X,K) pareja generatriz.

Definición 5.2. Un conjunto ordenado de elementos de A es divisiblemente ordenado si el orden de cada elemento divide al del siguiente.

Definición 5.3. Un conjunto ordenado de elementos de A es básico si es conjunto canónico de generadores del subgrupo que genera, con inclusión en su caso de elementos unidad.

Definición 5.4. Un conjunto ordenado de elementos de A es totalmente básico si es conjunto canónico de generadores de A.

Lema 5.5. |24, lema 3.1.| Si a y b son dos enteros positivos, entonces

$$(1-\frac{1}{a}) + (1-\frac{1}{b}) \geq (1-\frac{1}{mcd(a,b)}) + (1-\frac{1}{mcm(a,b)}).$$

Lema 5.6. |24, teorema 3.| Si $A = Z/_{m_1} \oplus Z/_{m_2} \oplus \ldots \oplus Z/_{m_k}$ con $m_i | m_{i+1}$, y $A' = Z/_{n_1} \oplus Z/_{n_2} \oplus \ldots \oplus Z/_{n_k}$, con $n_i | n_{i+1}$, y existe un epimorfismo de A sobre A', entonces $n_i | m_i$ para todo i

Corolario 5.7. En estas condiciones,

$$\sum_{i=1}^{k} (1-\frac{1}{m_i}) \geq \sum_{i=1}^{k} (1-\frac{1}{n_i}),$$

y sólo son iguales si $A = A'$.

Teorema 5.8. Sea un grupo abeliano A, y $\xi_1,\dots,\xi_r$ elementos de A, tales que $\xi_1^{\mu_1} = \dots = \xi_r^{\mu_r} = 1$. Entonces existen $\eta_1,\dots,\eta_t$, que generan el mismo subgrupo que $\xi_1,\dots,\xi_r$, y verifican $\eta_1^{\lambda_1} = \dots = \eta_t^{\lambda_t} = 1$, con $\sum_{i=1}^{t} (1-\frac{1}{\lambda_i}) \leqslant \sum_{j=1}^{r} (1-\frac{1}{\mu_j})$, y $\lambda_i | \lambda_{i+1}$.

Demostración.

Como A es abeliano, sean $\mu_1 \leqslant \mu_2 \leqslant \dots \leqslant \mu_r$. Tomemos el primer μ_i que no divide a μ_{i+1}. Sea $\mathrm{mcd}(\mu_i,\mu_{i+1}) = d$, y sean $\mu_i = d\mu_i'$, $\mu_{i+1} = d\mu_{i+1}'$, $\mathrm{mcd}(\mu_i',\mu_{i+1}') = 1$. Llamemos ahora

$$\theta_i = \xi_i^{r\mu_i'} \xi_{i+1}^{s\mu_{i+1}'}, \qquad \theta_{i+1} = \xi_i^{1-r\mu_i'} \xi_{i+1}^{1-s\mu_{i+1}'}.$$

El subgrupo que generan θ_i y θ_{i+1} es el mismo que generan ξ_i y ξ_{i+1} si la matriz de la transformación tiene módulo 1, esto es,

$$\begin{vmatrix} r\mu_i' & s\mu_{i+1}' \\ 1-r\mu_i' & 1-s\mu_{i+1}' \end{vmatrix} = 1,$$

o sea, $r\mu_i' - s\mu_{i+1}' = 1$. Existen r y s en estas condiciones, pues μ_i' y μ_{i+1}' son primos entre sí. Ahora,

$$\theta_i^d = 1, \quad \theta_{i+1}^{\mathrm{mcm}(\mu_i,\mu_{i+1})} = 1.$$

Luego los órdenes de θ_i y θ_{i+1} dividen a d y a $\mathrm{mcm}(\mu_i,\mu_{i+1})$. Por el lema 5.5., la suma ha disminuido. Así, reemplazamos ξ_i y ξ_{i+1} por θ_i y θ_{i+1}. Reordenamos los generadores como antes, y reiteramos el proceso hasta que no se pueda repetir más.

Definición 5.9. Sea X un conjunto de elementos de A, de órdenes μ_i. Llamaremos $\mu(X) = \sum (1-\frac{1}{\mu_i})$.

Teorema 5.10. Sea (X,K) una pareja generatriz. Existen conjuntos básicos, X_1, K_1, tales que (X_1,K_1) es una pareja generatriz, $\mathrm{card}(K) = \mathrm{card}(K_1)$, y $\mu(X_1) \leq \mu(X)$.

Demostración.

Sea G el subgrupo generado por X, y sea X_1 un conjunto canónico de generadores de G. Por el teorema 5.8., $\mu(X_1) \leq \mu(X)$. Sea K' conjunto canónico de generadores del subgrupo generado por K, y K_1 el conjunto básico formado por K' y tantos elementos unidad como hagan falta para que $\mathrm{card}(K_1) = \mathrm{card}(K)$. Como X_1 y K_1 generan los mismos subgrupos que X y K, (X_1,K_1) es pareja generatriz.

Teorema 5.11. Sea (X,K) una pareja generatriz. Entonces existe una pareja divisiblemente ordenada, (X^*,K^*) que es pareja generatriz y cumple $\mathrm{card}(K^*) = \mathrm{card}(K)$, $\mu(X^*) \leq \mu(X)$.

Demostración.

En virtud del teorema anterior, supondremos X y K básicos. Sean $X = \{\xi_1,\dots,\xi_r\}$, $K = \{\kappa_1,\dots,\kappa_p\}$, $\mathrm{orden}(\xi_i) = \lambda_i$, $\mathrm{orden}(\kappa_i) = n_i$, $\lambda_i | \lambda_{i+1}$, $n_i | n_{i+1}$. Si $\lambda_r \nmid n_1$, sea $\{\xi'_r, \kappa'_1\}$ un conjunto básico de dos generadores del subgrupo generado por ξ_r y κ_1. El orden de ξ'_r divide a $\mathrm{mcd}(\lambda_r, n_1)$. Sean $X' = \{\xi_1,\dots,\xi_{r-1}, \xi'_r\}$, $K' = \{\kappa'_1, \kappa_2,\dots,\kappa_p\}$. Entonces el grupo generado por X' es imagen homomórfica del generado por X. Sea X_2 conjunto canónico de generadores de este grupo, luego es $\mu(X_2) \leq \mu(X)$, por el lema 5.6. Sea K_2 un conjunto básico de generadores del subgrupo generado por K', tal que $\text{card}(K_2) = \text{card}(K')$.

Entonces (X_2,K_2) es pareja generatriz. Ahora repetimos el proceso, hasta que (X^*,K^*) es una pareja generatriz divisiblemente ordenada. En cada paso ha disminuido la función μ, y permanecido constante $\text{card}(K)$.

Teorema 5.12. Sean (X^*,K^*) una pareja generatriz divisiblemente ordenada, y (X_3,K_3) una pareja generatriz totalmente básica, con $\text{card}(K_3) = \text{card}(K^*)$. Entonces $\mu(X_3) \leq \mu(X^*)$.

Demostración.

Sean $\text{card}(X^*) = \sigma$, $\text{card}(K^*) = \tau$. Sean los órdenes de los elementos de X^* y K^*, $d_1,\ldots,d_\sigma,d_{\sigma+1},\ldots,d_{\sigma+\tau}$, donde $d_i | d_{i+1}$.

Sea ahora el grupo $A' = Z/_{d_1} \oplus \ldots \oplus Z/_{d_{\sigma+\tau}}$. Como (X^*,K^*) es pareja generatriz de A, hay un epimorfismo de A' sobre A.

Sea $A = Z/_{\nu_1} \oplus \ldots \oplus Z/_{\nu_{\sigma+\tau}}$, donde $\nu_i = 1$ para $i = 1,\ldots$ $\ldots,\sigma+\tau-q$, $\nu_{\sigma+\tau-q+j} = m_j$. Entonces $\nu_j | \nu_{j+1}$, y por el lema 5.6., $\nu_i | d_i$.

Sea (X_3,K_3) la pareja totalmente básica, tal que $\text{card}(K_3) = \text{card}(K^*)$. Entonces

$$\mu(X_3) = \sum_{i=1}^{\sigma} \left(1-\frac{1}{\nu_i}\right) \leq \sum_{i=1}^{\sigma} \left(1-\frac{1}{d_i}\right) = \mu(X^*).$$

Resulta, pues, que manteniendo $c(K)$ constante, el valor de la función μ para cualquier pareja generatriz es mayor o igual que para la pareja totalmente básica. Utilizaremos este resultado para minimizar $\Lambda(\Gamma)$.

Proposición 5.13. Entre las parejas generatrices de G, y los grupos NEC que admiten un epimorfismo sobre G, de núcleo $(g,-,[-],\{-\})$, existe una biyección.

Demostración.

Sea (X,K) una pareja generatriz de G. Sean $X = \{\xi_1,\ldots,\xi_r\}$ y $K = \{\delta_1,\ldots,\delta_\gamma\}$. Llamaremos $\xi_{r+1} = (\xi_1\ldots\xi_r\delta_1^2\ldots\delta_\gamma^2)^{-1}$. Sean μ_i los órdenes de los ξ_i. Si fuera $\mu_{r+1} = 1$, sería

$$\xi_1\ldots\xi_r\delta_1^2\ldots\delta_\gamma^2 = 1$$

luego $\xi_r = (\xi_1\ldots\xi_{r-1}\delta_1^2\ldots\delta_\gamma^2)^{-1}$, y entonces (X',K), con $X' = \{\xi_1,\ldots,\xi_{r-1}\}$ sería pareja generatriz. Si es $r = 0$, llamaremos $\xi_1 = (\delta_1^2\ldots\delta_\gamma^2)^{-1}$. Si fuera $\mu_1 = 1$, sería $\delta_1^2\ldots\delta_\gamma^2 = 1$, luego $(\delta_1\ldots\delta_\gamma)^2 = 1$. Como G es un grupo de orden impar, sería pues $\delta_1\ldots\delta_\gamma = 1$, y $\delta_\gamma = (\delta_1\ldots\delta_{\gamma-1})^{-1}$, y entonces (X,K'), con $K' = \{\delta_1,\ldots,\delta_{\gamma-1}\}$ sería pareja generatriz.

Podemos suponer, en consecuencia, $\mu_{r+1} \neq 1$.

Sea ahora el grupo NEC $(\gamma,-,[\mu_1,\ldots,\mu_{r+1}],\{-\})$, que llamaremos $\Gamma(X,K)$. Hay al menos un epimorfismo de $\Gamma(X,K)$ sobre G, el que viene definido por $\theta(x_i) = \xi_i$, $\theta(d_j) = \delta_j$.

Por otra parte, dado Γ con $r+1$ periodos y género γ, y un epimorfismo $f : \Gamma \longrightarrow G$, es $\Gamma = \Gamma(X,K)$, siendo

$$X = \{f(x_1),\ldots,f(x_r)\}, \quad K = \{f(d_1),\ldots,f(d_\gamma)\}.$$

Teorema 5.14. Sea G un grupo abeliano no cíclico, de orden N impar, $G = Z/_{m_1} \oplus \ldots \oplus Z/_{m_s}$. Entonces el género mínimo, g, de una superficie de Klein no orientable, sin borde, para la que G es grupo de automorfismos es

$$g = N\left(-1 + \sum_{i=1}^{s} \left(1-\frac{1}{m_i}\right) \right) + 2.$$

Demostración.

Hemos visto que $\Lambda(\Gamma)$ se minimiza cuando el grupo Γ es $\Gamma(X,K)$ y (X,K) es una pareja generatriz totalmente básica de G. Así, es

$$\min(\Lambda(\Gamma)) = \min_{\gamma}(\min(\Lambda(\Gamma))|\Gamma\in N_{\gamma}) = \min_{\substack{\gamma \\ (X,K)\ \text{tot. básica}}} (\mu(X)+\gamma-2),$$

siendo $\gamma = \operatorname{card}(K)$.

Calculemos $\mu(X)$. Tenemos $X = \{\xi_1,\ldots,\xi_r\}$, $K = \{\delta_1,\ldots,\delta_\gamma\}$ con las condiciones $\xi_1^{\mu_1} = \ldots = \xi_r^{\mu_r} = \xi_1\ldots\xi_r\delta_1^2\ldots\delta_\gamma^2 = 1$.

Como G es abeliano, de

$$\xi_1\ldots\xi_r\delta_1^2\ldots\delta_\gamma^2 = 1,$$

se deduce

$$\xi_r = (\xi_1\ldots\xi_{r-1}\delta_1^2\ldots\delta_\gamma^2)^{-1},$$

luego G es el grupo abeliano de generadores

$$\xi_1,\ldots,\xi_{r-1},\delta_1,\ldots,\delta_\gamma$$

y relaciones

$$\xi_1^{\mu_1} = \ldots = \xi_{r-1}^{\mu_{r-1}} = 1,$$

luego se tiene

$r - 1 + \gamma = s$, $\mu_i = m_i$, y en consecuencia, $r = s - \gamma + 1$, $\mu_1 = m_1, \dots, \mu_{s-\gamma+1} = m_{s-\gamma+1}$.

Queda, pues, que

$$\min(\Lambda(\Gamma) \mid \Gamma \in N_\gamma) = \gamma - 2 + \sum_{i=1}^{s-\gamma+1} (1 - \frac{1}{m_i}).$$

Debemos ahora minimizar este valor entre todos los posibles valores de γ, esto es, calcular

$$\min_{1 \leq \gamma \leq s} (\gamma - 2 + \sum_{i=1}^{s-\gamma+1} (1 - \frac{1}{m_i})).$$

Es obvio que este mínimo se tiene para $\gamma = 1$, y vale

$$-1 + \sum_{i=1}^{s} (1 - \frac{1}{m_i}).$$

Nos queda ahora comparar este resultado con el que obtuvimos para el caso en que era $r = 0$. Pero es claro que siempre

$$-1 + \sum_{i=1}^{s} (1 - \frac{1}{m_i}) < s - 1.$$

Luego $\min(\Lambda(\Gamma)) = -1 + \sum_{i=1}^{s} (1 - \frac{1}{m_i})$. Como era $\frac{g-2}{N} = \Lambda(\Gamma)$, resulta

$$g = N(-1 + \sum_{i=1}^{s} (1 - \frac{1}{m_i})) + 2.$$

Esta cota se alcanza siempre. Sea, en efecto,

$$G = Z/_{m_1} \oplus \dots \oplus Z/_{m_s}.$$

Consideremos $\Gamma : (1, -, [m_1, \dots, m_s], \{\text{—}\})$. Entonces,

$$\begin{array}{rcl} \theta : \Gamma : (1,-,[m_1,\dots,m_s],\{-\}) & \longrightarrow & G = {}^{Z}/_{m_1} \oplus \dots \oplus {}^{Z}/_{m_s} \\ x_1 & \longmapsto & (1, 0, \dots, 0) \\ & & \dots \\ x_s & \longmapsto & (0, 0, \dots, 1) \\ d_1 & \longmapsto & (\frac{m_1-1}{2}, \frac{m_2-1}{2}, \dots, \frac{m_s-1}{2}) \end{array}$$

es un epimorfismo de Γ sobre G, y $\ker\theta : (g,-,[-],\{-\})$, con

$$N = \frac{g-2}{-1+\sum_{i=1}^{s}(1-\frac{1}{m_i})},$$

luego $g = N(-1+\sum_{i=1}^{s}(1-\frac{1}{m_i})) + 2.$

<u>Proposición 5.15.</u> Sea G un grupo abeliano no cíclico de orden N impar, $G = {}^{Z}/_{m_1} \oplus \dots \oplus {}^{Z}/_{m_s}$. Si G es grupo de automorfismos de una superficie de Klein no orientable, sin borde, de género g, es

$$N \leq \frac{3(g-2)}{2s-3}.$$

<u>Demostración.</u>

Por el teorema 5.14., es

$$g \geq N(-1+\sum_{i=1}^{s}(1-\frac{1}{m_i})) + 2.$$

Como $m_i \geq 3$, es $(1-\frac{1}{m_i}) \geq \frac{2}{3}$, y se tiene

$$g \geq N(-1+\frac{2}{3}s) + 2,$$

luego

$$N \leq \frac{g - 2}{-1 + \frac{2}{3}s} = \frac{3(g-2)}{2s-3}.$$

Esta cota se alcanza en cada caso. Basta, en efecto, considerar el grupo $\Gamma : (1,-,[3,\overset{s}{\ldots},3],\{-\})$ y el epimorfismo

$$\begin{aligned} \theta : \Gamma : (1,-,[3,\overset{s}{\ldots},3],\{-\}) &\longrightarrow G = (Z/_3)^s \\ x_1 &\longmapsto (1, \ldots ,0) \\ &\;\;\ldots \\ x_s &\longmapsto (0, \ldots ,1) \\ d_1 &\longmapsto (1, \ldots ,1) \end{aligned}$$

<u>Corolario 5.16.</u> Sea G un grupo abeliano, no cíclico, de orden N impar, de automorfismos de una superficie de Klein no orientable, sin borde, de género g. Entonces $N \leq 3g-6$.

<u>Demostración.</u> Por la proposición 5.15., es

$$N \leq \frac{3g - 6}{2s - 3}.$$

Como G no es cíclico, $s \geq 2$, luego $N \leq 3g-6$. Esta cota se alcanza cuando $s = 2$, $m_1 = m_2 = 3$, resultando $3g = 15$, luego $g = 5$. En efecto, el epimorfismo

$$\begin{aligned} \theta : \Gamma : (1,-,[3,3],\{-\}) &\longrightarrow Z/_3 \oplus Z/_3 \\ x_1 &\longmapsto (1,0) \\ x_2 &\longmapsto (0,1) \\ d_1 &\longmapsto (1,1) \end{aligned}$$

verifica que $\ker\theta : (g,-,[-],\{-\})$, y

$$9 = \frac{g - 2}{-1 + \frac{2}{3} + \frac{2}{3}} = \frac{g-2}{\frac{1}{3}} = 3(g-2),$$

luego $g = 5$.

Corolario 5.17. Las superficies de Klein no orientables, sin borde, de género 3 ó 4, no admiten grupos abelianos no cíclicos de automorfismos, de orden impar.

Demostración.

Si existe un grupo en estas condiciones, su orden es al menos 9. Por el corolario 5.16., en consecuencia, $9 \leq 3g - 6$, luego $g \geq 5$.

Corolario 5.18. Sea $G = Z/_{m_1} \oplus \dots \oplus Z/_{m_s}$ un grupo abeliano, no cíclico, de automorfismos de una superficie de Klein no orientable, sin borde, de género 3 ó 4. Entonces m_{s-1} es una potencia de 2, y en consecuencia también $m_1, \dots, m_{s-2}$.

Demostración.

Si no lo fuera, m_{s-1} admitiría un factor k impar. Como m_s también lo admitiría, $Z/_k \oplus Z/_k$ sería subgrupo de G, luego grupo de automorfismos de la superficie, en contradicción con el corolario 5.17.

Proposición 5.19. Sea $G = Z/_{m_1} \oplus Z/_{m_2} \oplus \dots \oplus Z/_{m_s}$ un grupo abeliano no cíclico de orden N impar, de automorfismos de una superficie de Klein no orientable, sin borde, de género g. Entonces

$$g \geq m_1^2 - 2m_1 + 2.$$

Demostración.

Por el teorema 5.14.,

$$g \geq N\left(-1 + \sum_{i=1}^{s}\left(1-\frac{1}{m_i}\right)\right) + 2.$$

Dejando fijo N, el paréntesis tiene su mínimo cuando $s = 2$, y

$m_2 = \frac{N}{m_1}$. En efecto, sean $m_1,\ldots,m_s$, tales que $\prod_{i=1}^{s} m_i = N$. Entonces,

$$\sum_{i=1}^{s} (1-\frac{1}{m_i}) = s - \frac{1}{m_1} - \ldots - \frac{1}{m_s} \geq s - \frac{1}{m_1} - \overset{s}{\ldots} - \frac{1}{m_1} = s - \frac{s}{m_1}.$$

Como $m_1 \geq 3$, $\sum_{i=1}^{s} (1-\frac{1}{m_i}) \geq s - \frac{s}{3} = \frac{2s}{3}$. Así, si $s > 2$, es

$$\sum_{i=1}^{s} (1-\frac{1}{m_i}) \geq \frac{2}{3}\cdot 3 = 2.$$

En cambio, si $s = 2$, $(1-\frac{1}{m_1}) + (1-\frac{1}{\frac{N}{m_1}}) = 2 - \frac{1}{m_1} - \frac{m_1}{N} < 2$.

Resulta de este modo que

$$g \geq N\,(-1 + (1-\frac{1}{m_1}) + (1-\frac{m_1}{N})) + 2.$$

Sea $N = \alpha m_1^2$. Entonces,

$$g \geq \alpha m_1^2(-1 + 1 - \frac{1}{m_1} + 1 - \frac{1}{\alpha m_1}) + 2 =$$

$$= \alpha m_1(m_1-1) - m_1 + 2.$$

Este valor crece con α, luego

$$g \geq m_1(m_1-1) - m_1 + 2 = m_1^2 - 2m_1 + 2.$$

La cota $g = m_1^2 - 2m_1 + 2$ se alcanza en cada caso, mediante el epimorfismo

$$\theta : \Gamma : (1,-,[m_1,m_1],\{-\}) \longrightarrow Z/_{m_1} \oplus Z/_{m_1}$$

$$x_1 \longmapsto (1,0)$$

$$x_2 \longmapsto (0,1)$$

$$d_1 \longmapsto (\frac{m_1-1}{2},\frac{m_1-1}{2})$$

siendo $\ker\theta:(g,-,[—],\{—\})$, y

$$m_1^2 = \frac{g - 2}{-1 + 2(1-\frac{1}{m_1})} = \frac{g-2}{1 - \frac{2}{m_1}} = \frac{m_1(g-2)}{m_1-2},$$

luego $m_1(m_1-2) = g-2$, y es $g = m_1^2 - 2m_1 + 2$.

Se observa que g crece muy rápidamente al crecer m_1, con la siguiente tabla de valores iniciales:

$m_1 = 3$, $g \geqslant 5$ (corolario 5.17)

$m_1 = 5$, $g \geqslant 17$

$m_1 = 7$, $g \geqslant 37$

$m_1 = 9$, $g \geqslant 65$

$m_1 = 11$, $g \geqslant 101$; etc.

CAPITULO 6.- SUPERFICIES DE RIEMANN SIMETRICAS

Una superficie de Riemann es simétrica si admite una involución anti-conforme |38|. En este capítulo estudiaremos los grupos de automorfismos de las superficies de Riemann simétricas, que contienen alguna simetría. Como es natural, se considerarán tanto los automorfismos que conservan la orientación, como aquéllos que la invierten.

Las superficies de Riemann simétricas están estrechamente relacionadas con cuestiones de Geometría Algebraica. En efecto, toda superficie de Riemann compacta se puede obtener como superficie de Riemann de una curva algebraica $f(z,w) = 0$. Una superficie de Riemann es simétrica si y sólo si se puede obtener como superficie de Riemann de una curva real. Los automorfismos de la superficie corresponden entonces a las autotransformaciones birracionales de la curva.

En este capítulo estudiamos cuándo un grupo cíclico es grupo de automorfismos, conteniendo alguna simetría, de una superficie de Riemann. A continuación estudiaremos cuál es el mínimo género posible de la superficie.

Singerman ha estudiado en |38| los grupos de automorfismos de superficies de Riemann simétricas, a partir de los grupos NEC. Todo grupo de automorfismos de una superficie de Riemann simétrica se puede expresar de la forma $\Gamma/_K$, donde Γ es un grupo NEC, y

K es el grupo fuchsiano de signatura $(g,+,[-],\{-\})$, donde g es el género de la superficie.

Un grupo cíclico, $Z/_n$, es grupo de automorfismos, conformes y anti-conformes, de una superficie de Riemann, y conteniendo alguna simetría, si y sólo si existe un epimorfismo θ de un grupo NEC Γ sobre $Z/_n$, de modo que $\ker(\theta)$ tenga signatura $(g,+,[-],\{-\})$, y existe un elemento no orientable $\gamma \in \Gamma$, tal que $\theta(\gamma)$ tenga orden 2.

Vamos a estudiar en primer lugar cómo han de ser $Z/_n$ y Γ para que se puedan cumplir estas condiciones.

<u>Proposición 6.1.</u> Para que en $Z/_n$ haya alguna simetría, n ha de ser par.

<u>Demostración.</u> Si n es impar, $Z/_n$ no tiene elementos de orden 2.

<u>Proposición 6.2.</u> Si $Z/_n$ es grupo de automorfismos, con alguna simetría, de una superficie de Riemann, n no es múltiplo de 4.

<u>Demostración.</u> Sea g_1 el elemento no orientable de Γ tal que $\theta(g_1) = \overline{n/2}$. Sea g_2 el elemento de Γ tal que $\theta(g_2) = \overline{1}$. Entonces, si n es múltiplo de 4, n/2 es par, y así $g_1 g_2^{n/2}$ es un elemento no orientable de Γ que pertenece a $\ker(\theta)$, absurdo.

<u>Proposición 6.3.</u> Si existe un epimorfismo de Γ sobre $Z/_n$ con núcleo $(g,+,[-],\{-\})$, en Γ no hay ciclo-periodos no vacíos.

<u>Demostración.</u> Si existe algún ciclo-periodo no vacío, es

$\theta(c_{i0}c_{i1}) = \theta(c_{i0})\theta(c_{i1}) = \overline{0}$, luego $c_{i0}c_{i1}$ es un elemento del núcleo, de orden finito, contradicción.

En consecuencia, Γ ha de ser de la forma

(i) $(\gamma,-,[\mu_1,\dots,\mu_r],\{(—),\overset{k}{\dots},(—)\})$

o de la forma

(ii) $(\gamma,+,[\mu_1,\dots,\mu_r],\{(—),\overset{k}{\dots},(—)\})$.

En cualquiera de ambos casos, como Γ se aplica sobre $Z/_n$, el subgrupo fuchsiano canónico, Γ^+, esto es, los elementos de Γ que conservan la orientación, se aplica sobre $Z/_{n/2}$. Utilizaremos este hecho para obtener condiciones necesarias para Γ.

1. Sea Γ : $(\gamma,-,[\mu_1,\dots,\mu_r],\{(—),\overset{k}{\dots},(—)\})$. Entonces el subgrupo fuchsiano canónico, Γ^+, tiene signatura

$$(\gamma+k-1,+,[\mu_1,\mu_1,\dots,\mu_r,\mu_r],\{—\}).$$

|37|. Aplicando a Γ^+ el teorema 4 de |14| obtenemos condiciones necesarias y suficientes para la existencia de un epimorfismo de Γ^+ sobre $Z/_{n/2}$. Estas condiciones son también suficientes para la existencia de epimorfismo de Γ sobre $Z/_n$.

Teorema 6.4. Sea Γ un grupo NEC de signatura $(\gamma,-,[\mu_1,\dots,\mu_r],\{(—),\overset{k}{\dots},(—)\})$. Existe un epimorfismo de Γ sobre $Z/_n$, cuyo núcleo K es de la forma $(g,+,[—],\{—\})$, y tal que en $\Gamma/_K$ hay alguna simetría, si y sólo si:

i) $\mu_i|\frac{n}{2}$ para $i = 1,\dots,r$.

ii) Si $\gamma = 1$, $k = 0$, entonces $\mathrm{mcm}(\mu_1,\dots,\mu_r) = \frac{n}{2}$, $r \geq 2$.

Demostración.

La necesidad se obtiene de aplicar al subgrupo Γ^+ de signatura $(\gamma+k-1,+,[\mu_1,\mu_1,\dots,\mu_r,\mu_r],\{-\})$ el teorema 4 de |14|.

Para probar la suficiencia basta construir el epimorfismo. Distinguiremos varios casos, según la signatura de Γ.

i) Si $k \neq 0$.

$$\theta : \Gamma : (\gamma,-,[\mu_1,\dots,\mu_r],\{(-),\overset{k}{\dots},(-)\}) \longrightarrow Z/_n$$

$$\begin{aligned}
c_{10} &\longmapsto \overline{n/2} \\
&\dots \\
c_{k0} &\longmapsto \overline{n/2} \\
x_1 &\longmapsto \overline{n/\mu_1} \\
&\dots \\
x_r &\longmapsto \overline{n/\mu_r} \\
d_1 &\longmapsto \overline{1} \\
&\dots \\
d_\gamma &\longmapsto \overline{1} \\
e_1 &\longmapsto \overline{0} \\
&\dots \\
e_{k-1} &\longmapsto \overline{0} \\
e_k &\longmapsto \overline{-2\gamma-\sum_{i=1}^{r}(n/\mu_i)}
\end{aligned}$$

ii) Si $k = 0$, $\gamma \neq 1$, $(2\gamma - 2 + \sum_{i=1}^{r} (n/\mu_i)) \equiv 4q \pmod{n}$, $q \neq 0$, $4q < n$.

$$\theta : \Gamma : (\gamma, -, [\mu_1, \ldots, \mu_r], \{-\}) \longrightarrow Z/_n$$

$$\begin{aligned}
x_1 &\longmapsto \overline{n/\mu_1} \\
&\ldots \\
x_r &\longmapsto \overline{n/\mu_r} \\
d_1 &\longmapsto \overline{1} \\
&\ldots \\
d_{\gamma-1} &\longmapsto \overline{1} \\
d_\gamma &\longmapsto \overline{(-2\gamma + 2 - \sum_{i=1}^{r} (n/\mu_i)) / 2}
\end{aligned}$$

iii) Si $k = 0$, $\gamma \neq 1$, $(2\gamma - 2 + \sum_{i=1}^{r} (n/\mu_i)) \not\equiv 4q \pmod{n}$, $4q < n$, ó $\equiv 0 \pmod{n}$.

$$\theta : \Gamma : (\gamma, -, [\mu_1, \ldots, \mu_r], \{-\}) \longrightarrow Z/_n$$

$$\begin{aligned}
x_1 &\longmapsto \overline{n/\mu_1} \\
&\ldots \\
x_r &\longmapsto \overline{n/\mu_r} \\
d_1 &\longmapsto \overline{1} \\
&\ldots \\
d_{\gamma-1} &\longmapsto \overline{1} \\
d_\gamma &\longmapsto \overline{(-2\gamma + 2 - \sum_{i=1}^{r} (n/\mu_i))/2} + \overline{n/2}
\end{aligned}$$

iv) Si $k = 0$, $\gamma = 1$, $(\sum_{i=1}^{r}(n/\mu_i)) \equiv 4q \pmod{n}$,

$q \neq 0$, $4q < n$.

$$\begin{aligned} \theta : \Gamma : (1,-,[\mu_1,\ldots,\mu_r],\{—\}) &\longrightarrow Z/_n \\ x_1 &\longmapsto \overline{n/\mu_1} \\ &\ldots \\ x_r &\longmapsto \overline{n/\mu_r} \\ d_1 &\longmapsto \overline{(-\sum_{i=1}^{r}(n/\mu_i))\ /\ 2} \end{aligned}$$

v) Si $k = 0$, $\gamma = 1$, $(\sum_{i=1}^{r}(n/\mu_i)) \not\equiv 4q \pmod{n}$, $4q < n$,

ó $\equiv 0 \pmod{n}$.

$$\begin{aligned} \theta : \Gamma : (1,-,[\mu_1,\ldots,\mu_r],\{—\}) &\longrightarrow Z/_n \\ x_1 &\longmapsto \overline{n/\mu_1} \\ &\ldots \\ x_r &\longmapsto \overline{n/\mu_r} \\ d_1 &\longmapsto \overline{(-\sum_{i=1}^{r}(n/\mu_i))/2} + \overline{n/2} \end{aligned}$$

Distinguimos los casos ii) y iii), y los casos iv) y v), porque hay que conseguir que la imagen de los elementos no orientables sea impar; en efecto si fuera $\theta(d_i)$ par, sería $\theta(d_i^{\,n/2}) = \overline{0}$, y se tendría un elemento no orientable del núcleo, absurdo.

En el caso i), una simetría es c_{10}; en los casos ii) y iii), lo es $d_1^{n/2}$. Veamos los casos iv) y v). Por hipótesis, como es $k = 0$, $\gamma = 1$, se tiene

$$\text{mcm}\,(\mu_1,\ldots,\mu_r) = \frac{n}{2}.$$

En consecuencia,

$$\text{mcd}\,(\frac{n/2}{\mu_1},\ldots,\frac{n/2}{\mu_r}) = 1,$$

luego existen $\alpha_1,\ldots,\alpha_r$, tales que

$$\alpha_1\frac{n/2}{\mu_1} + \ldots + \alpha_r\frac{n/2}{\mu_r} = 1,$$

y entonces

$$\frac{\alpha_1 n}{\mu_1} + \ldots + \frac{\alpha_r n}{\mu_r} = 2.$$

Llamando ahora $\theta(d_1) = \overline{p}$ (por construcción, p siempre impar), se tiene

$$\theta(d_1(x_1^{\alpha_1}\ldots x_r^{\alpha_r})^{\frac{n-p+1}{2}}) = \overline{p} + \frac{n-p+1}{2}\,\overline{2} = \overline{1}.$$

Luego θ es un epimorfismo, y además

$$(d_1(x_1^{\alpha_1}\ldots x_r^{\alpha_r})^{\frac{n-p+1}{2}})^{\frac{n}{2}}$$

es un elemento no orientable cuya imagen mediante θ es $\overline{n/2}$, esto es, una simetría.

2. Sea ahora Γ : $(\gamma,+,[\mu_1,\ldots,\mu_r],\{(-),\overset{k}{\ldots},(-)\})$. Ha de ser $k > 0$, para que existan en Γ elementos no orientables. El subgrupo fuchsiano canónico, Γ^+, tiene signatura

$$(2\gamma+k-1,+,[\mu_1,\mu_1,\ldots,\mu_r,\mu_r],\{-\}).$$

|37|. Aplicando a Γ^+ el teorema 4 de |14| obtenemos condicio-

nes necesarias y suficientes para la existencia de un epimorfismo de Γ^+ sobre $Z/_{n/2}$. Estas condiciones son también suficientes para la existencia de epimorfismo de Γ sobre $Z/_n$.

<u>Teorema 6.5.</u> Sea Γ un grupo NEC de signatura $(\gamma,+,[\mu_1,\dots,\mu_r],\{(—),\overset{k}{\dots},(—)\})$, con $k>0$. Existe un epimorfismo de Γ sobre $Z/_n$, cuyo núcleo K es de la forma $(g,+,[—],\{—\})$, y tal que en $\Gamma/_K$ hay alguna simetría, si y sólo si:

i) $\mu_i \mid \frac{n}{2}$ para $i = 1,\dots,r$.

ii) Si $\gamma = 0$, $k = 1$, entonces $\mathrm{mcm}(\mu_1,\dots,\mu_r) = \frac{n}{2}$, $r \geq 2$.

<u>Demostración.</u>

La necesidad se obtiene de aplicar al subgrupo Γ^+ de signatura $(2\gamma+k-1,+,[\mu_1,\mu_1,\dots,\mu_r,\mu_r],\{—\})$ el teorema 4 de |14|.

Para probar la suficiencia, basta construir el epimorfismo. Como en el caso anterior, distinguiremos varios casos, según la signatura de Γ.

i) Si $\gamma = 0$, $k = 1$.

$$\theta : \Gamma : (0,+,[\mu_1,\dots,\mu_r],\{(—)\}) \longrightarrow Z/_n$$

$$\begin{aligned}
c_{10} &\longmapsto \overline{n/2} \\
x_1 &\longmapsto \overline{n/\mu_1} \\
&\dots \\
x_r &\longmapsto \overline{n/\mu_r} \\
e_1 &\longmapsto \overline{-\sum_{i=1}^{r}(n/\mu_i)}
\end{aligned}$$

ii) Si $\gamma \neq 0$.

$$\theta : \Gamma : (\gamma,+,[\mu_1,\dots,\mu_r],\{(-),\overset{k}{\dots},(-)\}) \longrightarrow Z/_n$$

$$\begin{array}{lcl}
c_{10} & \longmapsto & \overline{n/2} \\
 & \dots & \\
c_{k0} & \longmapsto & \overline{n/2} \\
x_1 & \longmapsto & \overline{n/\mu_1} \\
 & \dots & \\
x_r & \longmapsto & \overline{n/\mu_r} \\
e_1 & \longmapsto & \overline{0} \\
 & \dots & \\
e_{k-1} & \longmapsto & \overline{0} \\
e_k & \longmapsto & \overline{-\sum_{i=1}^{r}(n/\mu_i)} \\
a_1 & \longmapsto & \overline{n/2+1} \\
b_1 & \longmapsto & \overline{0} \\
a_2 & \longmapsto & \overline{0} \\
b_2 & \longmapsto & \overline{0} \\
 & \dots & \\
a_\gamma & \longmapsto & \overline{0} \\
b_\gamma & \longmapsto & \overline{0}
\end{array}$$

iii) Si $\gamma = 0$, $k \neq 1$.

$$\theta : \Gamma \; : \; (0,+,[\mu_1,\dots,\mu_r],\{(—),\overset{k}{\dots},(—)\}) \longrightarrow Z/_n$$

$$\begin{array}{lcl}
c_{10} & \longmapsto & \overline{n/2} \\
 & \dots & \\
c_{k0} & \longmapsto & \overline{n/2} \\
x_1 & \longmapsto & \overline{n/\mu_1} \\
 & \dots & \\
x_r & \longmapsto & \overline{n/\mu_r} \\
e_1 & \longmapsto & \overline{n/2 + 1} \\
e_2 & \longmapsto & \overline{0} \\
 & \dots & \\
e_{k-1} & \longmapsto & \overline{0} \\
e_k & \longmapsto & \overline{-\sum_{i=1}^{r} (n/\mu_i) - n/2 - 1}
\end{array}$$

En cada caso, c_{10} es una simetría. En el caso ii), $\theta(c_{10}a_1) = \overline{1}$, luego θ es epimorfismo; en el caso iii), $\theta(c_{10}e_1) = \overline{1}$, y también θ es epimorfismo. Veamos el caso i).

Como es $\gamma = 0$, $k = 1$, por hipótesis se tiene

$$\text{mcm}\,(\mu_1,\dots,\mu_r) = \frac{n}{2},$$

luego

$$\text{mcd}\,(\frac{n/2}{\mu_1},\dots,\frac{n/2}{\mu_r}) = 1,$$

y existen $\alpha_1,\dots,\alpha_r$, tales que

$$\alpha_1\frac{n/2}{\mu_1} +\dots+ \alpha_r\frac{n/2}{\mu_r} = 1,$$

y entonces

$$\frac{\alpha_1 n}{\mu_1} + \ldots + \frac{\alpha_r n}{\mu_r} = 2.$$

De este modo

$$\theta(c_{10}(x_1^{\alpha_1}\ldots x_r^{\alpha_r})^{\frac{n/2+1}{2}}) = \frac{\bar{n}}{\bar{2}} + \frac{n/2+1}{2}\,\bar{2} = \bar{1}.$$

Así, θ es un epimorfismo.

Una vez estudiado cómo ha de ser Γ, vamos a minimizar $\mu(\Gamma)$, para hallar el mínimo género posible de una superficie de Riemann simétrica que admita un grupo cíclico dado como grupo de automorfismos con alguna simetría.

Enunciamos en primer lugar un resultado que utilizaremos posteriormente.

Lema 6.6. |14, lema 2|. Sea $k = p_1^{\alpha_1}\ldots p_t^{\alpha_t}$, con $p_1 < \ldots < p_t$ factores primos de k; y sea

$$L = \{(a,b) \mid a \geqslant 2,\ b \geqslant 2,\ \mathrm{mcm}(a,b) = k\}.$$

Entonces, $\max\limits_{(a,b)\in L} (\frac{1}{a}+\frac{1}{b})$ se tiene para $a = p_1$, $b = k$, si $\alpha_1 \neq 1$, y para $a = p_1$, $b = \frac{k}{p_1}$ si $\alpha_1 = 1$.

Teorema 6.7. Sea un grupo cíclico $G = Z/_n$. G es grupo de automorfismos, con alguna simetría, de una superficie de Riemann simétrica si y sólo si n es par y no múltiplo de 4; y si $n = 2p_1^{\alpha_1}\ldots p_t^{\alpha_t}$, con $2 < p_1 < \ldots < p_t$, el género mínimo de la superficie, g, es el siguiente:

i) si $\alpha_1 = t = 1$, $g = \frac{n}{2} - 1$

ii) si $\alpha_1 = 1$, $t > 1$, $g = \frac{n}{2}(1-\frac{1}{p_1}) - p_1 + 1$

iii) si $\alpha_1 > 1$, $g = \frac{n}{2}(1-\frac{1}{p_1})$

iv) si $t = 0$, $g = 2$.

Y en cada caso se alcanza este mínimo.

Demostración.

Como hemos visto en capítulos anteriores, es $\Gamma/_K = Z/_n$, luego $n = \frac{|K|}{|\Gamma|}$, de donde $\Delta(\Gamma)n = 2g - 2$. Para minimizar g, debemos pues minimizar $\Delta(\Gamma)$.

A. Sea $\Gamma:(\gamma,-,[\mu_1,\ldots,\mu_r],\{(—),\overset{k}{\ldots},(—)\})$, con $k > 0$. Entonces $\Delta(\Gamma) = \gamma - 2 + k + \sum_{i=1}^{r}(1-\frac{1}{\mu_i})$; como $\gamma \geq 1$, $k \geq 1$, el mínimo $\Delta(\Gamma)$ posible se tiene para $\gamma = k = r = 1$, y es $\Delta(\Gamma) = 1 - \frac{1}{\mu_1}$, con $\mu_1 | \frac{n}{2}$. Como $\frac{n}{2} = p_1^{\alpha_1}\ldots p_t^{\alpha_t}$, el mínimo es $\Delta(\Gamma) = 1 - \frac{1}{p_1}$.

B. Sea $\Gamma:(\gamma,-,[\mu_1,\ldots,\mu_r],\{—\})$. Entonces se tiene $\Delta(\Gamma) = \gamma - 2 + \sum_{i=1}^{r}(1-\frac{1}{\mu_i})$. Si $\gamma > 2$, $\Delta(\Gamma) \geq 1$; si $\gamma = 2$, $\Delta(\Gamma) = \sum_{i=1}^{r}(1-\frac{1}{\mu_i}) \geq 1 - \frac{1}{p_1}$; si $\gamma = 1$, $\Delta(\Gamma) = -1 + \sum_{i=1}^{r}(1-\frac{1}{\mu_i})$.

Como $\mu_i \geq 3$, si $r \geq 3$, $\Delta(\Gamma) \geq 2 - \frac{1}{\mu_1} - \frac{1}{\mu_2} - \frac{1}{\mu_3} \geq 1$; si $r=2$, $\Delta(\Gamma) = 1 - \frac{1}{\mu_1} - \frac{1}{\mu_2}$, con $\mathrm{mcm}(\mu_1,\mu_2) = \frac{n}{2}$. Y por el teorema 6.4., no puede ser $r < 2$.

C. Sea $\Gamma : (\gamma, +, [\mu_1, \dots, \mu_r], \{(—), \overset{k}{\dots}, (—)\})$, siempre con $k > 0$. Entonces es $\Lambda(\Gamma) = 2\gamma - 2 + k + \sum_{i=1}^{r} (1 - \frac{1}{\mu_i})$. Si $\gamma \geq 1$, es $\Lambda(\Gamma) \geq 1$. Sea pues $\gamma = 0$, y $\Lambda(\Gamma) = k - 2 + \sum_{i=1}^{r} (1 - \frac{1}{\mu_i})$.
Si $k \geq 3$, es $\Lambda(\Gamma) \geq 1$; si $k = 2$, $\Lambda(\Gamma) = \sum_{i=1}^{r} (1 - \frac{1}{\mu_i}) \geq 1 - \frac{1}{p_1}$; y si $k = 1$, $\Lambda(\Gamma) = -1 + \sum_{i=1}^{r} (1 - \frac{1}{\mu_i})$; como $\mu_i \geq 3$, si $r \geq 3$, es $\Lambda(\Gamma) \geq 2 - \frac{1}{\mu_1} - \frac{1}{\mu_2} - \frac{1}{\mu_3} \geq 1$; si $r = 2$, $\Lambda(\Gamma) = 1 - \frac{1}{\mu_1} - \frac{1}{\mu_2}$, con $\mathrm{mcm}(\mu_1, \mu_2) = \frac{n}{2}$. Y por el teorema 6.5., no puede ser $r < 2$.

Aplicando ahora el lema 6.6., como $n = 2p_1^{\alpha_1} \dots p_t^{\alpha_t}$, los valores de μ_1 y μ_2, tales que $\mathrm{mcm}(\mu_1, \mu_2) = \frac{n}{2}$ y $\frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2}$ sea máximo son:

i) si $\frac{n}{2} = p_1$, $\quad \mu_1 = \mu_2 = p_1$

ii) si $\frac{n}{2} = p_1 p_2^{\alpha_2} \dots p_t^{\alpha_t}$, $\quad \mu_1 = p_1$, $\mu_2 = \frac{n/2}{p_1}$

iii) si $\frac{n}{2} = p_1^{\alpha_1} \dots p_t^{\alpha_t}$, $\quad \mu_1 = p_1$, $\mu_2 = \frac{n}{2}$.

Se tiene así,

i) si $\alpha_1 = t = 1$, $\quad \Lambda(\Gamma) = 1 - \frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_1}$

ii) si $\alpha_1 = 1$, $t > 1$, $\quad \Lambda(\Gamma) = 1 - \frac{1}{p_1} - \frac{1}{\frac{n}{2p_1}}$

iii) si $\alpha_1 > 1$, $\quad \Lambda(\Gamma) = 1 - \frac{1}{p_1} - \frac{1}{n/2}$.

Y aplicando $g = \Lambda(\Gamma)\frac{n}{2} + 1$, se tiene lo que queríamos probar.

Sólo nos falta el caso $\frac{n}{2} = 1$; como $g \geqslant 2$, basta probar que se alcanza este valor mínimo.

Veamos ahora que estas cotas se alcanzan. Para ello basta construir en cada caso un grupo Γ, con $\mu(\Gamma)$ mínimo, que cumpla las condiciones de los teoremas 6.4. y 6.5. Son los siguientes:

i) $\alpha_1 = t = 1$, $\quad \Gamma:(1,-,[\frac{n}{2},\frac{n}{2}],\{-\})$,

ii) $\alpha_1 = 1$, $t > 1$, $\quad \Gamma:(1,-,[p_1,\frac{n}{2p_1}],\{-\})$,

iii) $\alpha_1 > 1$, $\quad \Gamma:(1,-,[p_1,\frac{n}{2}],\{-\})$,

iv) $n = 2$, $\quad \Gamma:(3,-,[-],\{-\})$.

En los casos i), ii) y iii), como $\gamma = 1$, $k = 0$, tiene que haber al menos dos periodos, y ser su mínimo común múltiplo igual a $\frac{n}{2}$ para cumplir las condiciones del teorema; pero ambas condiciones se verifican por construcción en los tres casos. En el caso iv) no hay problema pues el teorema sólo exige condiciones sobre los periodos.

<u>Corolario 6.8.</u> Si f es un automorfismo de una superficie de Riemann simétrica de género g, tal que en el grupo generado por f hay alguna simetría, entonces el orden de f es $\leqslant 3g + 6$.

<u>Demostración.</u> Por el teorema 6.7.,

$$g \geqslant \{ \frac{n}{2} - 1,\ \frac{n}{2}(1-\frac{1}{p_1}) - p_1 + 1,\ \frac{n}{2}(1-\frac{1}{p_1}) \}.$$

Como en el caso ii) del teorema, $n > 2p_1^2$, la función

$$\frac{n}{2}(1-\frac{1}{p_1}) - p_1 + 1,$$

de derivada $\frac{n}{2p_1^2} - 1$, es estrictamente creciente; y como en el caso iii) también $n \geqslant 2p_1^2$, la función $\frac{n}{2}(1-\frac{1}{p_1})$, de derivada $\frac{n}{2p_1^2}$ es también estrictamente creciente. En consecuencia, ambas tienen su mínimo para $p_1 = 3$. Resulta pues

$$g \geqslant \{ \frac{n}{2} - 1,\ \frac{n}{3} - 2,\ \frac{n}{3} \},$$

y despejando n, se tiene

$$n \leqslant \{ 2(g+1),\ 3(g+2),\ 3g \}.$$

Luego resulta que siempre $n \leqslant 3g + 6$.

<u>Observación 6.9.</u> Por el teorema 6.7. y el corolario 6.8. resulta que esta cota se alcanza cuando es $\alpha_1 = 1$. $t > 1$, $p_1 = 3$, esto es, cuando $n = 6\alpha$, $\alpha > 1$, α impar no múlt plo de 3. Luego es $\alpha = 6\beta \pm 1$, y tenemos pues

$$3g + 6 = n = 6\alpha = 6(6\beta \pm 1) = 36\beta \pm 6,$$

de donde

$$3g = 36\beta \text{ ó } 36\beta - 12,$$

$$g = 12\beta \text{ ó } 12\beta - 4,$$

esto es,

$$g \equiv 0 \pmod{12} \quad \text{ó} \quad g \equiv 8 \pmod{12}.$$

Ha resultado, pues, que este orden máximo se alcanza en las superficies cuyo género sea congruente con 0 ó con 8, módulo 12.

CAPITULO 7.- AUTOMORFISMOS ANTI-CONFORMES EN SUPERFICIES DE RIEMANN

En el capítulo anterior hemos estudiado en qué condiciones un grupo de automorfismos de una superficie de Riemann contiene alguna simetría de la superficie. Vamos ahora a ampliar el objetivo, planteando la siguiente cuestión: ¿Dado un grupo cíclico, ¿en qué condiciones es grupo de automorfismos de una superficie de Riemann, de modo que contenga algún elemento no orientable?

En sucesivos pasos obtendremos cuáles son los grupos cíclicos en estas condiciones, y veremos qué grupos Γ se pueden aplicar sobre el grupo cíclico del modo requerido. A continuación estudiaremos cuál es el mínimo género de la superficie para la que el grupo dado es grupo de automorfismos, y como corolario obtendremos cuál es el máximo orden posible de un automorfismo anti-conforme en una superficie de Riemann.

Este último es un problema clásico, que para automorfismos orientables de superficies de Riemann resolvió Wiman |45|. Para automorfismos de superficies de Klein no orientables sin borde, el problema ha sido resuelto por Bujalance |7|, y para superficies de Klein con borde, por May |29|.

Vamos a estudiar cuándo un grupo cíclico, $Z/_n$, es grupo de automorfismos, con elementos no orientables, de una superficie de Riemann.

Si la superficie tiene género g, ha de ser $Z/_n = \Gamma/_K$, donde Γ es un grupo NEC, y K es el grupo fuchsiano de signatura $(g,+,[-],\{-\})$.

Proposición 7.1. Si $Z/_n$ es grupo de automorfismos, con alguno no orientable, de una superficie de Riemann, n es par.

Demostración. Si n es impar, como K: $(g,+,[-],\{-\})$ es subgrupo normal de Γ, la signatura de Γ es

$$(\gamma,+,[\mu_1,\ldots,\mu_r],\{(n_{11},\ldots,n_{1s_1}),\ldots,(n_{k1},\ldots,n_{ks_k})\}),$$

|5|. Como en Γ tiene que haber elementos no orientables, forzosamente existe algúna reflexión, y la imagen de ésta en $Z/_n$ ha de ser de orden 2. Pero si n es impar, en $Z/_n$ no hay elementos de orden 2.

Proposición 7.2. Si $Z/_n$ es grupo de automorfismos, con alguno no orientable, de una superficie de Riemann, y $\frac{n}{2}$ es par, en Γ no hay reflexiones, siendo $Z/_n = \Gamma/_K$.

Demostración. Sea $g \in \Gamma$, tal que $\theta(g) = \bar{1}$; entonces, $\theta(g^{n/2}c_{ij}) = \bar{0}$. Si fuera $\frac{n}{2}$ par, $g^{n/2}c_{ij}$ sería un elemento no orientable de Γ que pertenecería a $\ker\theta$, contradicción.

Proposición 7.3. Si $Z/_n = \Gamma/_K$ es grupo de automorfismos, con alguno no orientable, de una superficie de Riemann, en Γ no hay ciclo-periodos no vacíos.

Demostración. Si existe un ciclo-periodo no vacío, es $\theta(c_{i0}c_{i1}) = \theta(c_{i0})\theta(c_{i1}) = \bar{0}$, luego $c_{i0}c_{i1}$ es un elemento de orden finito que pertenece al núcleo de θ, absurdo.

Una vez vistas estas condiciones generales para $Z/_n$ y para Γ, distinguiremos en nuestro estudio dos posibilidades: que n sea múltiplo de 4, y que no lo sea.

<u>Proposición 7.4.</u> Si n no es múltiplo de 4, $Z/_n$ es grupo de automorfismos, con alguno no orientable, de una superficie de Riemann, si y sólo si tiene alguna simetría.

<u>Demostración.</u>

Es claro que si en el grupo hay una simetría, hay un automorfismo que invierte la orientación, que es la propia simetría. Veamos pues la recíproca. Supongamos que en $Z/_n$ hay un elemento, $\bar{k}$, imagen de un elemento no orientable, κ, de Γ. Entonces hay otro elemento no orientable de Γ, λ, tal que $\theta(\lambda) = \bar{1}$. En efecto, si no existiera, el elemento de Γ, λ', tal que $\theta(\lambda') = \bar{1}$ sería orientable, y entonces $\theta(\lambda'^{n-k}\kappa) = \bar{0}$, luego habría un elemento no orientable en el núcleo, contradicción. Tenemos pues que existe $\lambda \in \Gamma$, no orientable, con $\theta(\lambda) = \bar{1}$. Pues bien, $\lambda^{n/2}$ es también no orientable, pues $\frac{n}{2}$ es impar, y $\theta(\lambda^{n/2}) = \overline{n/2}$, de orden 2. Luego el grupo tiene una simetría.

En consecuencia, en el caso en que n no sea múltiplo de 4 es equivalente la existencia de simetrías con la de automorfismos no orientables; por lo que nuestro estudio se reduce al que hicimos en el capítulo 6 para simetrías, y se obtiene el siguiente resultado:

<u>Proposición 7.5.</u> Si $\Gamma: (\gamma,-,[\mu_1,\ldots,\mu_r],\{(—),\overset{k}{\ldots},(—)\})$, se puede establecer un epimorfismo de Γ sobre $Z/_n$, cuyo núcleo sea $K: (g,+,[—],\{—\})$, y tal que en $\Gamma/_K$ haya elementos no orientables, si y sólo si

i) $\mu_i | \frac{n}{2}$ para $i = 1,\ldots,r$

ii) Si $\gamma = 1$, $k = 0$, entonces $\mathrm{mcm}(\mu_1,\ldots,\mu_r) = \frac{n}{2}$, $r \geq 2$.

Si $\Gamma : (\gamma,+,[\mu_1,\ldots,\mu_r],\{(-),\overset{k}{\ldots},(-)\})$, con $k > 0$, se puede establecer un epimorfismo de Γ sobre $Z/_n$, cuyo núcleo sea $K : (g,+,[-],\{-\})$, y tal que en $\Gamma/_K$ haya elementos no orientables, si y sólo si

i) $\mu_i | \frac{n}{2}$ para $i = 1,\ldots,r$

ii) Si $\gamma = 0$, $k = 1$, entonces $\text{mcm}(\mu_1,\ldots,\mu_r) = \frac{n}{2}$, $r \geqslant 2$.

Si $n = 2p_1^{\alpha_1}\ldots p_t^{\alpha_t}$, con $2 < p_1 < \ldots < p_t$, el género mínimo de la superficie para la que $Z/_n$ es grupo de automorfismos, con alguno no orientable, es

i) si $t = 0$, $g = 2$

ii) si $\alpha_1 = t = 1$, $g = \frac{n}{2} - 1$

iii) si $\alpha_1 = 1$, $t > 1$, $g = \frac{n}{2}(1-\frac{1}{p_1}) - p_1 + 1$

iv) si $\alpha_1 > 1$, $g = \frac{n}{2}(1-\frac{1}{p_1})$.

Procederemos ahora al estudio del caso en que n sea múltiplo de 4.

Si n es múltiplo de 4, por la proposición 7.2. en Γ no puede haber reflexiones. Así, la signatura de Γ es $(\gamma,\pm,[\mu_1,\ldots,\mu_r],\{-$ y como tiene que haber elementos no orientables, es forzosamente $(\gamma,-,[\mu_1,\ldots,\mu_r],\{-\})$. En consecuencia, el subgrupo fuchsiano canónico, Γ^+, es $(\gamma-1,+,[\mu_1,\mu_1,\ldots,\mu_r,\mu_r],\{-\})$.

Utilizando el teorema 4 de |14| obtenemos condiciones necesarias y suficientes para la existencia de un epimorfismo de Γ^+ sobre $Z/_{n/2}$; y además obtendremos una condición adicional para la existencia de epimorfismo de Γ sobre $Z/_n$.

Teorema 7.6. Sea Γ un grupo NEC de signatura $(\gamma,-,[\mu_1,\ldots,\mu_r],\{—\})$. Existe un epimorfismo de Γ sobre $Z/_n$, con $4|n$, cuyo núcleo K es de la forma $(g,+,[—],\{—\})$, y tal que en $\Gamma/_K$ hay elementos anti-conformes, si y sólo si

i) $\mu_i|\frac{n}{2}$ para $i = 1,\ldots,r$

ii) Si $\gamma = 1$, entonces $\text{mcm}(\mu_1,\ldots,\mu_r) = \frac{n}{2}$, $r \geq 2$

iii) $4|((\sum_{\mu_i \text{ par}} \frac{n}{\mu_i}) + 2\gamma)$.

Demostración.

Veamos en primer lugar que las condiciones son necesarias: i) y ii) se obtienen de aplicar el teorema 4 de |14| al subgrupo Γ^+. Probemos la iii). Sean x_i, d_j los generadores de Γ. Sea $i \leq r$. Si μ_i es par, como $\theta(x_i)$ es de orden μ_i en $Z/_n$, es $\theta(x_i) = \overline{p_i\frac{n}{\mu_i}}$, con p_i primo con μ_i, y en consecuencia impar.

Sea $\overline{q_j} = \theta(d_j)$, que es siempre impar, pues si fuera q_j par, y siendo g tal que $\theta(g) = \overline{1}$, sería $g^{n-q_j}d_j$ un elemento no orientable del núcleo. Entonces, como en Γ se tiene

$$x_1\ldots x_r d_1^2\ldots d_\gamma^2 = 1,$$

resulta

$$\theta(x_1\ldots x_r d_1^2\ldots d_\gamma^2) = \overline{0},$$

luego se tiene

$$\overline{\sum_{i=1}^{r} p_i\frac{n}{\mu_i} + 2\sum_{j=1}^{\gamma} q_j} = \overline{\underbrace{\sum_{\mu_i \text{ impar}} p_i\frac{n}{\mu_i}}_{(A)} + \underbrace{\sum_{\mu_i \text{ par}} p_i\frac{n}{\mu_i} + 2\sum_{j=1}^{\gamma} q_j}_{(B)}} = \overline{0}$$

(A) es siempre múltiplo de 4, pues lo es $\frac{n}{\mu_i}$ cuando μ_i es impar.

En cuanto a (B), es múltiplo de 4 si y sólo si lo es

$$\Big(\sum_{\mu_i \text{ par}} \frac{n}{\mu_i}\Big) + 2\gamma .$$

En efecto, $\quad (B) - \Big(\Big(\sum_{\mu_i \text{ par}} \frac{n}{\mu_i}\Big) + 2\gamma\Big) =$

$$= \Big(\sum_{\mu_i \text{ par}} (p_i - 1)\frac{n}{\mu_i}\Big) + 2\sum_{j=1}^{\gamma} (q_j - 1),$$

y $p_i - 1$, $\frac{n}{\mu_i}$ y $q_j - 1$ son pares, luego

$$(B) - \Big(\Big(\sum_{\mu_i \text{ par}} \frac{n}{\mu_i}\Big) + 2\gamma\Big)$$

es siempre múltiplo de 4, luego ambos números son, o no, múltiplos de 4 a la vez. Ha quedado pues probada la necesidad de iii).

Veamos ahora que las tres condiciones son suficientes. Se reduce la demostración a construir el epimorfismo. Distinguiremos dos casos según la signatura de Γ.

i) $\gamma \neq 1$.

$$\begin{array}{lcl}
\theta : \Gamma : (\gamma, -, [\mu_1, \ldots, \mu_r], \{-\}) & \longrightarrow & Z/_n \\
x_1 & \longmapsto & \overline{n/\mu_1} \\
& \cdots & \\
x_r & \longmapsto & \overline{n/\mu_r} \\
d_1 & \longmapsto & \overline{1} \\
d_{\gamma-1} & \longmapsto & \overline{1} \\
d_\gamma & \longmapsto & \overline{\Big(-\sum_{i=1}^{r} \frac{n}{\mu_i} - 2\gamma + 2\Big)/2}
\end{array}$$

ii) $\gamma = 1$.

$$\begin{aligned}
\theta : \Gamma : (1,-,[\mu_1,\dots,\mu_r],\{-\}) &\longrightarrow Z/_n \\
x_1 &\longmapsto \overline{n/\mu_1} \\
&\dots \\
x_r &\longmapsto \overline{n/\mu_r} \\
d_1 &\longmapsto \overline{(-\sum_{i=1}^{r} \frac{n}{\mu_i})/2}
\end{aligned}$$

En el caso ii), por hipótesis, $4|((\sum_{i=1}^{r} \frac{n}{\mu_i}) + 2)$, aplicando la condición iii) y el hecho de que $\frac{n}{\mu_i}$ es múltiplo de 4 si μ_i es impar. En consecuencia, $4 \nmid \sum_{i=1}^{r} \frac{n}{\mu_i}$, luego $\theta(d_1)$ es impar. Además, $\mathrm{mcm}(\mu_1,\dots,\mu_r) = \frac{n}{2}$, luego $\mathrm{mcd}(\frac{n/2}{\mu_1},\dots,\frac{n/2}{\mu_r}) = 1$, y existen $\alpha_1,\dots,\alpha_r$, tales que $\alpha_1\frac{n/2}{\mu_1} +\dots+ \alpha_r\frac{n/2}{\mu_r} = 1$, y entonces

$$\frac{\alpha_1 n}{\mu_1} +\dots+ \frac{\alpha_r n}{\mu_r} = 2.$$

Entonces, llamando $\overline{p} = \theta(d_1)$, se tiene

$$\theta(d_1(x_1^{\alpha_1}\dots x_r^{\alpha_r})^{\frac{n-p+1}{2}}) = \overline{p} + \frac{n-p+1}{2}\,\overline{2} = \overline{1}.$$

Luego θ es un epimorfismo, y el elemento $d_1(x_1^{\alpha_1}\dots x_r^{\alpha_r})^{\frac{n-p+1}{2}} = g$ es un elemento no orientable que cumple $\theta(g) = \overline{1}$.

Una vez vistas las condiciones necesarias y suficientes para Γ, vamos a minimizar $\mu(\Gamma)$ para hallar el menor género posible de la superficie.

Probaremos en primer lugar un resultado que utilizaremos posteriormente.

Lema 7.7. Sea

$$L = \{(x,y,z) \in Z^3 \mid x,y,z \geq 2, \quad mcm(x,y,z) = k, \quad 2|k\}.$$

Entonces,
$$\max_{(x,y,z)\in L} \left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right) = 1 + \frac{1}{k}, \quad \text{si} \quad 4|k;$$
$$\max_{(x,y,z)\in L} \left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right) = 1 + \frac{2}{k}, \quad \text{si} \quad 4\nmid k.$$

Demostración.

Si $x = y = 2$, es $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} > 1$. Entonces, si $4|k$, para que $mcm(2,2,z) = k$, ha de ser $z = k$, y se tiene $(x,y,z) = (2,2,k)$. Si $4\nmid k$, ha de ser $\frac{k}{2}|z$, y en consecuencia, $\max(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z})$ se tiene para $z = \frac{k}{2}$, y es $(x,y,z) = (2,2,\frac{k}{2})$.

Veamos ahora en qué casos se obtiene $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} > 1$, no siendo $x = y = 2$. Sólo hay tres posibilidades: $(2,3,3)$, $(2,3,4)$ y $(2,3,5)$. En ninguna de ellas obtenemos un resultado mejor que el anterior; en efecto,

i) $mcm(2,3,3) = 6$, luego $(2,2,\frac{k}{2}) = (2,2,3)$, y $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3} < \frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$.

ii) $mcm(2,3,4) = 12$, luego $(2,2,k) = (2,2,12)$, y $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4} = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{12}$.

iii) $mcm(2,3,5) = 30$, luego $(2,2,\frac{k}{2}) = (2,2,15)$, y $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5} < \frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{15}$.

Teorema 7.8. Sea un grupo cíclico $Z/_n$, con $4|n$. Este grupo es grupo de automorfismos, con alguno no orientable, de una superficie de Riemann. Si $n = 2^{\alpha} p_1^{\alpha_1} \ldots p_t^{\alpha_t}$, con $2 < p_1 < \ldots < p_t$, el género mínimo de la superficie, g, es

i) si $\alpha = 2$, $t = 0$, $g = 3$

ii) si $\alpha = 2$, $t \geq 1$, $g = \frac{n}{4} - 1$

iii) si $\alpha > 2$, $g = \frac{n}{4}$.

Demostración.

Como hemos visto en capítulos anteriores, es $Z/_n = \Gamma/_K$, luego $n = \frac{|K|}{|\Gamma|}$, y así se tiene $\Lambda(\Gamma)n = 2g-2$. Para minimizar g, debemos pues minimizar $\Lambda(\Gamma)$.

Γ tiene signatura $(\gamma,-,[\mu_1,\ldots,\mu_r],\{—\})$, luego $\Lambda(\Gamma) =$ $= \gamma - 2 + \sum_{i=1}^{r} (1-\frac{1}{\mu_i})$. Si $\gamma \geq 3$, $\Lambda(\Gamma) \geq 1$. Si $\gamma = 2$, se tiene

$\Lambda(\Gamma) = \sum_{i=1}^{r} (1-\frac{1}{\mu_i})$, y el mínimo resulta para $r = 1$, $\mu_1 = 2$. Por el teorema 7.6., este resultado sólo es admisible si $4|\frac{n}{2}+4$, esto es, si $8|n$. Si $8\nmid n$, puede ser $n=4$ ó $n=4k$, con $k > 1$, k impar. Si $n=4$, por el teorema 7.6.iii) no puede haber un solo periodo propio, y sería $\Lambda(\Gamma) \geq 1$; y si $n=4k=4p_1^{\alpha_1}\ldots p_t^{\alpha_t}$, el mínimo se tiene para $\mu_1 = p_1$. Por último, si $\gamma = 1$, resulta entonces

$\Lambda(\Gamma) = -1 + \sum_{i=1}^{r} (1-\frac{1}{\mu_i})$; si $r \geq 4$, $\Lambda(\Gamma) \geq 1$; si $r = 3$, $\Lambda(\Gamma) =$ $= 2 - \frac{1}{\mu_1} - \frac{1}{\mu_2} - \frac{1}{\mu_3}$, y si $r = 2$, $\Lambda(\Gamma) = 1 - \frac{1}{\mu_1} - \frac{1}{\mu_2}$.

Si $r = 3$, por el lema 7.7. el mínimo se tiene para $\Lambda(\Gamma) =$ $= 2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{n/2} = 1 - \frac{2}{n}$, si $8|n$; y para $\Lambda(\Gamma) = 2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{n/4} =$ $= 1 - \frac{4}{n}$, si $8\nmid n$.

Si $r = 2$, por el lema 6.6. el mínimo se tiene para $\mu_1 =$ $\frac{n}{2}$, $\mu_2 = 2$, si $8|n$. Por el teorema 7.6. ha de ser $4|\frac{n}{2} + 2 + 2$, esto es, $8|n$. Si $8\nmid n$, nuevamente por el lema 6.6., el mínimo se tiene para $\mu_1 = 2$, $\mu_2 = \frac{n}{4}$; y $4|\frac{n}{2} + 2$, o sea, $8\nmid n$. Dichos mínimos son, respectivamente, $\mu(\Gamma) = \frac{1}{2} - \frac{2}{n}$, y $\mu(\Gamma) = \frac{1}{2} - \frac{4}{n}$.

El mínimo ha de estar, por lo tanto, entre los siguientes resultados:

i) si $n = 4$, $\mu(\Gamma) = 1$

ii) si $n \neq 4$, $8\nmid n$, $\mu(\Gamma) = 1-\frac{1}{p_1}$, ó $1-\frac{4}{n}$, ó $\frac{1}{2}-\frac{4}{n}$

iii) si $8|n$, $\mu(\Gamma) = \frac{1}{2}$, ó $1-\frac{2}{n}$, ó $\frac{1}{2}-\frac{2}{n}$.

Luego los resultados mejores son:

i) si $\alpha = 2$, $t = 0$, $\mu(\Gamma) = 1$

ii) si $\alpha = 2$, $t \geqslant 1$, $\mu(\Gamma) = \frac{1}{2} - \frac{4}{n}$

iii) si $\alpha > 2$, $\mu(\Gamma) = \frac{1}{2} - \frac{2}{n}$.

Como $g = \frac{n}{2}\mu(\Gamma) + 1$, queda probado el teorema. Estas cotas son alcanzables, pues los siguientes grupos cumplen las condiciones del teorema 7.6.:

i) si $\alpha = 2$, $t = 0$, $\Gamma:(2,-,[2,2],\{-\})$;

ii) si $\alpha = 2$, $t \geqslant 1$, $\Gamma:(1,-,[2,\frac{n}{4}],\{-\})$;

iii) si $\alpha > 2$, $\Gamma:(1,-,[2,\frac{n}{2}],\{-\})$.

En efecto, en los casos ii) y iii) tiene que haber al menos dos periodos, y ser su mínimo común múltiplo igual a $\frac{n}{2}$, lo cual se verifica por construcción; y, respectivamente, $4|2+2+4$, $4|\frac{n}{2}+2$, y $4|\frac{n}{2}+4$, luego en los tres casos se cumple la tercera condición del teorema.

Vamos a estudiar ahora cuál es el máximo orden posible de los automorfismos no orientables de una superficie de Riemann.

Corolario 7.9. Sea f un automorfismo no orientable de una superficie de Riemann de género g. Entonces el orden de f es menor o igual que $4g + 4$.

Demostración.

Por la proposición 7.5. y el teorema 7.8., se tiene

$$g \geqslant \{ \frac{n-6}{3} , \frac{n}{4} - 1 , \frac{n}{4} \},$$

luego resulta

$$n \leqslant \{ 3g + 6, \quad 4g + 4, \quad 4g \}.$$

Se tiene así que siempre $n \leqslant 4g + 4$.

Observación 7.10. Por el teorema 7.8. y el corolario 7.9., esta cota se alcanza cuando $n = 2^{\alpha} p_1^{\alpha_1} \ldots p_t^{\alpha_t}$, y valen $\alpha = 2$, $t \geqslant 1$, esto es, $n = 4k$, $k > 1$, k impar. Luego

$$4g + 4 = 4k = 4(2\beta+1) = 8\beta + 4,$$

y así se tiene $g = 2\beta$; luego resulta que esta cota se alcanza para los géneros pares.

REFERENCIAS

|1| Accola, R.D.M. "On the number of automorphisms of a closed Riemann surface" Trans. AMS, 131 (1968) 398-408.

|2| Alling, N.L. "Real elliptic curves" Notes of Math., vol. 54, North-Holland. Amsterdam (1981).

|3| Alling, N.L. - Greenleaf, N. "Foundations of the theory of Klein surfaces" Lecture Notes in Math., vol. 219, Springer-Verlag. Berlín (1971).

|4| Bujalance, E. "Sobre los subgrupos normales NEC" Tesis Doctoral, Universidad Complutense. Madrid (1980).

|5| Bujalance, E. "Normal subgroups of NEC groups" Math. Zeit., 178 (1981) 331-341.

|6| Bujalance, E. "Proper periods of normal NEC subgroups with even index" Rev. Mat. Hisp.-Amer., (4) 41 (1981) 121-127.

|7| Bujalance, E. "Cyclic groups of automorphisms of compact non-orientable Klein surfaces without boundary" Pacific J. of Math. (aparecerá).

|8| Bujalance, E. "Automorphisms groups of compact Klein surfaces with one boundary component" (aparecerá).

|9| Bujalance, E. - Gamboa, J.M. "Automorphisms groups of algebraic curves of $\mathbb{R}^n$ of genus 2" Archiv der Math. (aparecerá).

|10| Clark, A. "Elementos de álgebra abstracta" (Ed. española) Alhambra. Madrid (1974).

|11| Coxeter, H.S.M. "The abstract groups $G^{m,n,p}$" Trans. AMS, 45 (1939) 73-150.

|12| Earle, C.J. "On moduli of closed Riemann surfaces with symmetries", en Advances in the theory of Riemann surfaces, Annals of math. studies 66 (1971).

|13| Fricke, R. - Klein, F. "Vorlesungen über die Theorie der automorphen Funktionen" Teubner. Leipzig, I (1897) y II (1912).

|14| Harvey, W.J. "Cyclic groups of automorphisms of a compact Riemann surface" Quart. J. Math. Oxford, (2) 17 (1966) 86-97.

|15| Hurwitz, A, "Über algebraische Gebilde mit eindeutigen Transformationen in sich" Math. Ann., 41 (1893) 403-442.

|16| Jones, G.A. - Singerman, D. "Theory of maps on orientable surfaces" Proc. London Math. Soc., (3) 37 (1978) 273-307.

|17| Kiley, W.T. "Automorphism groups on compact Riemann surfaces" Trans. AMS, 150 (1970) 557-563.

|18| Klein, F. "Über Riemanns Theorie der algebraischen Funktionen und ihrer Integrale" Teubner. Leipzig (1882).

|19| Macbeath, A.M. "Discontinuous groups and birational transformations" Proc. Dundee Summer School (1961) 59-75.

|20| Macbeath, A.M. "On a theorem of Hurwitz" Proc. Glasgow Math. Asoc., 5 (1961) 90-96.

|21| Macbeath, A.M. "On a curve of genus 7" Proc. London Math. Soc., (3) 15 (1965) 527-542.

|22| Macbeath, A.M. "The classification of non-euclidean plane crystallographic groups" Can. J. Math., 6 (1967) 1192-1205.

|23| Macbeath, A.M. - Singerman, D. "Space of subgroups and Teichmüller space" Proc. London Math. Soc., (3) 31 (1975) 211-256.

|24| Maclachlan, C. "Abelian groups of automorphisms of compact Riemann surfaces" Proc. London Math, Soc., (3) 15 (1965) 699-712.

|25| Maclachlan, C. "A bound for the number of automorphisms of a compact Riemann surface" J. London Math. Soc., 44 (1969) 265-272.

|26| May, C.L. "Automorphisms of compact Klein surfaces with boundary" Pacific J. of Math., 59 (1975) 199-210.

|27| May, C.L. "Large automorphism groups of compact Klein surfaces with boundary" Glasgow Math. J., 18 (1977) 1-10.

|28| May, C.L. "A bound for the number of automorphisms of a compact Klein surface with boundary" Proc. AMS, 63 (1977) 273-280.

|29| May, C.L. "Cyclic automorphism groups of compact bordered Klein surfaces" Houston J. Math., 3 (1977) 395-405.

|30| Moore, M.J. "Fixed points of automorphisms of compact Riemann surfaces" Can. J. Math., 22 (1970) 922-932.

|31| Poincaré, H. "Theorie des groups fuchsiens" Acta Math., 1 (1882) 1-62.

|32| Preston, R. "Projective structures and fundamental domains on compact Klein surfaces" Ph. D. thesis. Univ. of Texas (1975).

|33| Sibner, R.J. "Uniformization of symmetric Riemann surfaces by Schottky groups" Trans. AMS, 116 (1965) 79-85.

|34| Sibner, R.J. "Symmetric fuchsian groups" Amer. J. Math., 90 (1968) 1237-1259.

|35| Sibner, R.J. "Symmetric surfaces in the Siegel half plane" Symp. on Fuchsian Groups and Modular Forms, Pittsburgh (1978).

|36| Singerman, D. "Automorphisms of compact non-orientable Riemann surfaces" Glasgow Math. J., 12 (1971) 50-59.

|37| Singerman, D. "On the structure of non-euclidean crystallographic groups" Proc. Cambridge Phil. Soc., 76 (1974) 233-240.

|38| Singerman, D. "Symmetries of Riemann surfaces with Large Automorphism Group" Math. Ann., 210 (1974) 17-32.

|39| Singerman, D. "Automorphisms of maps, permutation groups and Riemann surfaces" Bull. London Math. Soc., 8 (1976) 65-68.

|40| Singerman, D. "Symmetries and pseudo-symmetries of hyperelliptic surfaces" Glasgow Math. J., 21 (1980) 39-49.

|41| Spencer, D. - Schiffer, M. "Functionals of finite Riemann surfaces" Princeton Univ. Press. Princeton (1954).

|42| Vinogradov, I. "Fundamentos de la teoría de números" (2ª edición española) Mir. Moscú (1977).

|43| Weyl, H. "Die Idee der Riemannschen Fläche" Leipzig (1913).

|44| Wilkie, M.C. "On non-euclidean crystallographic groups" Math. Zeit., 91 (1966) 87-102.

|45| Wiman, A. "Über die hyperelliptischen Curven und diejenigen vom Geschlechte p = 3, welche eindeutigen Transformationen in sich zulassen" Bihang Kongl. Svenska Vetenskaps-akademiens Handlingar. Estocolmo (1895-96).

|46| Zarrow, R. "A canonical form for symmetric and skew-symmetric extended symplectic modular matrices with applications to Riemann surface theory" Trans. AMS, 204 (1975) 207-227.

|47| Zieschang, H. "Finite groups of mapping classes of surfaces" Lecture Notes in Math., vol. 875, Springer-Verlag. Berlín (1981).

|48| Zieschang, H. - Vogt, E. - Coldewey, H.D. "Surfaces and planar discontinuous groups" Lecture Notes in Math., vol. 835, Springer-Verlag. Berlín (1980).